Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WiSe 2015/2016
Institut für Analysis 26.02.2016
Prof. Dr. Michael Plum
Peter Rupp M.Sc

Klausur zur Vorlesung
Differentialgleichungen und Hilberträume

Name:

Matrikelnummer:

Hinweise:

a) Die Klausur enthält 7 Aufgaben. Bitte prüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

b) Bitte ergänzen Sie zunächst Name und Matrikelnummer im oberen Teil des Deckblattes und jedes Aufgabenblattes. Falls Sie zusätzliche Blätter abgeben wollen, schreiben Sie bitte auf jedes solche Ihren Namen.

c) Zur Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit.

d) Insgesamt können 80 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur genügen 30 Punkte.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte):

a) Sei $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig und es existiere ein erstes Integral $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ des autonomen Systems

$$\dot{x}=F(x). \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass für jedes $G\in C^1(\mathbb{R})$ mit $G'(y)\neq 0$ (für alle $y\in\mathbb{R}$) durch $H_G:=G\circ H$ ein weiteres erstes Integral für das System (1) definiert wird.

b) Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases}\dot{x} &= -\frac{1}{x(1+x^2+y^2)}\\ \dot{y} &= \frac{1}{y(1+x^2+y^2)}\end{cases},\quad x,y>0.$$

Weisen Sie nach, dass das System ein erstes Integral $H:(0,\infty)^2\to\mathbb{R}$ besitzt und berechnen Sie eines.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Berechnen Sie alle stationären Punkte des folgenden Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie diese auf Stabilität:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x(t) + y(t)e^{2t} \\ \dot{y}(t) &= -y(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Berechnen Sie alle stationären Punkte des folgenden Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sin(y) \\ \dot{y} &= \cos(x). \end{cases}$$

Untersuchen Sie anschließend, was Sie anhand der Eigenwerte der Linearisierung über die Stabilität dieser stationären Punkte aussagen können.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Sei $r \in C[0,1]$ beliebig. Beweisen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} 2y'' + y = r & \text{auf } [0,1], \\ y(0) = 0, & y'(1) = 0, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung in $C^2[0,1]$ besitzt. Berechnen Sie anschließend die Greensche Funktion zu $(2y'' + y,\ y(0),\ y'(1))$.

Aufgabe 5 (13 Punkte): Sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein symmetrischer, linearer Operator. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $\{\psi_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von T zu Eigenwerten λ_k $(k \in \mathbb{N})$ mit der Eigenschaft:

$$\exists C > 0 : |\lambda_k| \leq C \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann ist T stetig und es gilt $\|T\| \leq C$.

b) Ist T kompakt, so gilt für jedes Orthonormalsystem $\{\phi_k : k \in \mathbb{N}\}$:

$$T\phi_k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(\phi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $T\phi_{k_j} \to w \in H$ $(j \to \infty)$, so gilt $w = 0$.

Aufgabe 6 (15 Punkte): Beweisen Sie, dass der Raum

$$L^2_{\text{symm}}(-\pi,\pi) := \{u \in L^2(-\pi,\pi) : \ u(x) = u(-x) \text{ für fast alle } x \in (-\pi,\pi)\} \subset L^2(-\pi,\pi)$$

ein abgeschlossener Untervektorraum ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\phi_n : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ \phi_n(x) = \cos(nx) : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2_{\text{symm}}(-\pi,\pi)$ bildet. Berechnen Sie ferner die beste Approximation von $f \in L^2(-\pi,\pi)$, definiert durch $f(x) := x \ \ (x \in (-\pi,\pi))$, in $L^2_{\text{symm}}(-\pi,\pi)$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das System

$$\{\psi_n : \ (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ \psi_n(x) = \sin(nx) : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\phi_n : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R},\ \phi_n(x) = \cos(nx) : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(-\pi,\pi)$ bildet.

Aufgabe 7 (12 Punkte): Zeigen Sie, dass der Raum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, definiert durch

$$V := \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2 : (kx_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2\}, \qquad \langle (x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k \overline{y_k},$$

ein separabler Hilbertraum ist.