

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 1

Abgabe: 24.04.2015 - 12Uhr

Aufgabe 1

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und λ sei kein Eigenwert von A . Weiter bezeichne $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Polynom vom Grad k mit Werten in \mathbb{R}^n , d.h. $p(t) = a_k t^k + \dots + a_1 t + a_0$ mit $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \neq 0$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vom Grad k gibt, sodass $y(t) = q(t)e^{\lambda t}$ spezielle Lösung des Systems $\dot{y} = Ay + p(t)e^{\lambda t}$ ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme:

a)

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} y, \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

b)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 30 \\ -9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3

Ermitteln Sie mittels Picard-Lindelöf-Iteration die Lösung des folgenden Anfangswertproblems für den harmonischen Oszillator:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Zwei Tanks K_1 und K_2 erhalten je 1000 Liter 5%-ige bzw. 2%-ige Salzlösung. Beginnend zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ laufen pro Minute 60 Liter reines Wasser in den Tank K_1 , werden 80 Liter von K_1 nach K_2 sowie 20 Liter von K_2 zurück nach K_1 gepumpt und es laufen 60 Liter aus K_2 ab.

a) Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ im Tank K_i zur Zeit t ? $i = 1, 2$.

b) Wie verhalten sich die Salzgehalte $m_i(t)$ für $t \rightarrow \infty$.

c) Gegen welchen Wert konvergiert $\frac{m_2(t)}{m_1(t)}$ für $t \rightarrow \infty$?

d) Was ergibt sich unter a) bis c), wenn in den Tank K_1 statt reinem Wasser eine 10%-ige Salzlösung zufließt?

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass in den Tanks das Salz jederzeit gleichmäßig verteilt ist.