Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 10

Abgabe: 26.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 37

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie die Vollständigkeit von $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$.

Aufgabe 38

Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die folgenden normierten Räume nicht vollständig sind:

a) $(l^p, \|\cdot\|_q)$

b) $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_p)$

In den folgenden beiden Aufgaben 39 und 40 soll der Dichtheitssatz 8.6 der Vorlesung für den (wichtigen) Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}^n$ bewiesen werden.

Aufgabe 39

Sei $(\phi_\eta)_{\eta\in(0,1)}$ eine Familie von Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\phi_\eta \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und es gibt ein $R > 0$ mit $\phi_\eta(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > R$ und alle $\eta \in (0,1)$.
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\eta(x)\,dx = 1$ für alle $\eta \in (0,1)$.
- Für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\int_{|x|\geq\delta} \phi_\eta(x)\,dx \to 0 \qquad (\eta \to 0).$$

a) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Familie von Funktionen an.

b) Sei $u \in C_0(\mathbb{R}^n) := \{u \in C(\mathbb{R}^n) : \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K : u(x) = 0\}$ ausgestattet mit der Supremumsnorm. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$A_\eta : C_0(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n),\ (A_\eta u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\eta(x-y)u(y)\,dy$$

stetig ist und für das Bild $A_\eta(C_0(\mathbb{R}^n))$ sogar gilt: $A_\eta(C_0(\mathbb{R}^n)) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Beweisen Sie, dass $(A_\eta)_{\eta\in(0,1)}$ für $\eta \to 0$ punktweise gegen die Identitätsabbildung konvergiert, d.h. für alle $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|A_\eta u - u\|_\infty \to 0 \qquad (\eta \to 0).$$

Bitte wenden

Aufgabe 40

Beweisen Sie folgende Dichtheitsrelationen:

a) $L_0^p(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K : u(x) = 0\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht.

b) $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht. Hinweis: Approximieren Sie durch Treppenfunkionen. Diese können als endliche Linearkombination der Form $\sum_{l\in\mathbb{N}} c_l\, \chi_{Q_l}$ geschrieben werden, wobei $c_l \in \mathbb{C}$ und χ_{Q_l} charakteristische Funktionen von offenen Quadern Q_l sind, welche eine Basis der Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ bilden.

c) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht. Hinweis: Kombinieren Sie b) mit Aufgabe 39.