Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 11

Abgabe: 03.07.2015 - 10Uhr

Aufgabe 43

Es sei

a) $V := (L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$.

b) $V := (C[0,1], \|\cdot\|_2)$,

c) $V := (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$,

Sei weiter $F \subset V$ der Unterraum definiert durch

$$F := \left\{ f \in V : \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^1 f(x)\,dx \right\}.$$

$f^* \in F$ heißt beste Approximation für $f \in V$, falls gilt:

$$\|f^* - f\| = \inf_{g \in F} \|g - f\|.$$

Entscheiden Sie für welche Räume V es für die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ eine beste Approximation $f^* \in F$ gibt und interpretieren Sie das Ergebnis.

Loesungsvorschlag zu Teil c):
Hier fehlt noch der zweite Teil: Wir haben bereits gezeigt, dass für jedes $u \in F$ gilt: $\|u - g\|_\infty \geq 1/4$. Es bleibt zu zeigen, dass es kein $u \in F$ gibt, mit $\|u - g\|_\infty = 1/4$. Angenommen doch. Dann gilt $u(x) = x + 1/4$ auf $(0, 1/2)$. Da $u \in F$, erhalten wir

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 u(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} u(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Das heißt, wir haben

$$\frac{1}{4} = \|u - g\|_\infty \geq 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (u(x) - x)\,dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Somit gilt auch $u(x) = x - \frac{1}{4}$ auf $(1/2, 1)$. Dies widerspricht aber der Stetigkeit von u.
Es bleibt zu zeigen, dass es eine Folge von Elementen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F gibt, sodass $\|u_n - g\|_\infty \to 1/4$ für $n \to \infty$. Wähle zum Beispiel:

$$u_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ u_n(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{4} & (0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{n}{n-4}(x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} & (\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ (1 - \frac{1}{4}n)(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ \frac{n}{n-4}(x - \frac{3}{4}) + \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{3}{4}) \\ x - \frac{1}{4} & (\frac{3}{4} < x \leq 1) \end{cases}.$$

Aufgabe 44

Es seien $U := \{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2 : u_{2k} = 0 \ (k \in \mathbb{N})\}$ und $V := \{(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2 : \ v_{2k-1} = kv_{2k} \ (k \in \mathbb{N})\}$.

a) Zeigen Sie: U und V sind abgeschlossene Unterräume von l^2. Die Summe $U + V$ ist direkt, d.h. $U \cap V = \{0\}$, aber $U + V$ ist nicht abgeschlossen.

b) Bestimmen Sie $U^\perp$.

Loesungsvorschlag:

a) Sei $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in U, mit $u^{(n)} \to u$ in l^2, dann folgt insbesondere: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $u_k^{(n)} \to u_k$ für $(n \to \infty)$. Daraus folgt, $u_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $u \in U$. Ebenso sei $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V mit $v^{(n)} \to v$ in l^2, dann folgt auch wieder eintragweise konvergenz und $|v_{2k-1}^{(n)} - kv_{2k}^{(n)} - (v_{2k-1} - kv_{2k})| \leq |v_{2k-1}^{(n)} - v_{2k-1}| + k|v_{2k}^{(n)} - v_{2k}| \leq (1+k)\|v^{(n)} - v\| \to 0$ für $n \to \infty$. Daraus folgt $v_{2k-1} - kv_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $v \in V$. Daher sind U und V abgeschlossene Unterräume. Ferner ist $U \cap V = \{0\}$, da aus $u \in U$ folgt $u_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und aus $u \in V$ folgt, $u_{2k-1} = ku_{2k} = 0$, das heißt, $u = 0$. Sei $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ das vollständige Orthonormalsystem von l^2, welches gegeben ist durch $e_k^n = \delta_{nk}$. Dann ist e^n in $U + V$, denn $e^{2n+1} \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $e_{2n} = 2ne_{2n} - (2ne_{2n} - e_{2n-1}) \in U + V$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt $U + V \subset l^2$ dicht. Es reicht also zu zeigen, dass $U+V \subsetneqq l^2$, um Nichtabgeschlossenheit zu erhalten. Betrachte die Folge $w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ definiert durch $w_k = k^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aber $w \notin U + V$, denn angenommen doch, dann gäbe es genau ein $u \in U$ und $v \in V$, mit $u_k + v_k = 1/k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $u_{2k} = 0$ erhält man $v_{2k} = 1/k$ und daraus folgt $v_{2k-1} = kv_{2k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass v kein Nullfolge ist und folglich $v \notin l^2$. Widerspruch.

b) Beh: $U^\perp = \{v \in l^2 : \ v_{2k+1} = 0 \ (k \in \mathbb{N})\}$
Bew:
$v \in U^\perp$ ist äquivalent zu $0 = \langle u, v\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{2k+1}v_{2k+1} = 0$ für alle $u \in U$. Insbesondere gilt dies auch für e^{2n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $v_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit die Inklusion "$\subseteq''$. Die umgekehrte Inklusion folgt sofort.