

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 11

Abgabe: 03.07.2015 - 10Uhr

Aufgabe 41

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Vektorraum und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass

$$B(V, W) := \{T : V \rightarrow W : \text{linear und beschränkt}\}$$

zusammen mit der Norm $\|T\| := \sup_{v \in V, \|v\|_V=1} \|Tv\|_W$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 42

- a) Seien $1 < p, q < \infty$ und $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ für $k, l \in \mathbb{N}$ derart gegeben, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} |\alpha_{kl}|^{p'} \right)^{q/p'} < \infty$, wobei $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Beweisen Sie, dass $T : l^p \rightarrow l^q$, $(Tx)_k := \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_{kl} x_l$ ein wohldefinierter, stetiger linearer Operator ist.

- b) Seien V, W normierte Räume und $T : V \rightarrow W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie:

$$\exists C > 0 : \|Tv\|_W \geq C\|v\|_V \quad (v \in V) \Leftrightarrow T \text{ ist injektiv und } T^{-1} : T(V) \rightarrow V \text{ ist stetig.}$$

Aufgabe 43

Es sei

- a) $V := (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2)$.
 b) $V := (C[0, 1], \|\cdot\|_2)$,
 c) $V := (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$,

Sei weiter $F \subset V$ der Unterraum definiert durch

$$F := \left\{ f \in V : \int_0^{1/2} f(x) dx = \int_{1/2}^1 f(x) dx \right\}.$$

$f^* \in F$ heißt beste Approximation für $f \in V$, falls gilt:

$$\|f^* - f\| = \inf_{g \in F} \|g - f\|.$$

Entscheiden Sie für welche Räume V es für die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ eine beste Approximation $f^* \in F$ gibt und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 44

Es seien $U := \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2 : u_{2k} = 0 \ (k \in \mathbb{N})\}$ und $V := \{(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2 : v_{2k-1} = kv_{2k} \ (k \in \mathbb{N})\}$.

- a) Zeigen Sie: U und V sind abgeschlossene Unterräume von l^2 . Die Summe $U + V$ ist direkt, d.h. $U \cap V = \{0\}$, aber $U + V$ ist nicht abgeschlossen.
 b) Bestimmen Sie U^\perp .



Geht wählen!
6.-10. Juli 2015

ASStA^{KIT}

Studierendenparlament und Fachschaften