Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 12

Abgabe: 10.07.2015 - 10Uhr

Aufgabe 47

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler, normierter Raum. Beweisen Sie, dass V vollständig ist.

Aufgabe 48

a) Sei H ein Hilbertraum und $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Sei weiter $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H und es gelte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_k - \psi_k\|^2 < \infty.$$

Beweisen Sie, dass dann auch $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist. Gehen Sie dabei zum Beispiel wie folgt vor:

- Wählen Sie $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\phi_k - \psi_k\|^2 < 1$ gilt. Definieren Sie

  $$U := LH\{\psi_k : \ k \geq N+1\}^{\perp}$$

  und

  $$\Phi : U \to \mathbb{K}^N, \ u \mapsto (\langle u, \phi_k \rangle)_{k=1}^N.$$

  Beweisen Sie, dass Φ injektiv ist.
- Beweisen Sie die Identität $H = \overline{LH\{\psi_k, \ k \in \mathbb{N}\}}$.

b) Sei H ein Hilbertraum und $U, V \subseteq H$ seien abgeschlossene Unterräume. Desweiteren bezeichnen P_U und P_V die zugehörigen Orthogonalprojektionen. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

$$U \subset V \qquad \Leftrightarrow \qquad P_U = P_U P_V = P_V P_U.$$

Aufgabe 49

Sei $c_0 := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ u_n \in \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N}), \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\} \subset l^{\infty}$ der Unterraum der gegen 0 konvergenten Folgen. Beweisen Sie, dass $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum ist und dass er separabel ist. Das heißt (analog zur Definition von Separabilität von Hilberträumen), es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge $A \subseteq c_0$. Ist l^{∞} separabel?

Aufgabe 50

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Interval. Sei weiter $1 \leq p < \infty$. Beweisen Sie die Separabilität von $L^p(a, b)$.