Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 13

Abgabe: 17.07.2015 - 10Uhr

Aufgabe 51

Beweisen Sie das Lemma von Lax-Milgram: Sei $B: H \times H \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform. Es gelte mit Konstanten $C, c > 0$:

- $|B[u,v]| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \qquad (u, v \in H)$.
- $\operatorname{Re}(B[u,u]) \geq c\|u\|^2 \qquad (u \in H)$.

Dann gibt es zu jedem $l \in H'$ ein eindeutiges $w \in H$, sodass $B[v,w] = l(v)$ für alle $v \in H$ gilt.

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor: Zu jedem $u \in H$ ist $f_u : v \mapsto B[u,v]$ ein lineares, beschränktes Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es also ein $w_u \in H$, sodass $f_u(v) = \langle v, w_u \rangle$ für alle $v \in H$ gilt. Beweisen Sie, dass der Operator $A: H \to H,\ u \mapsto w_u$ linear und beschränkt ist. Ferner gibt es zu $l \in H'$ ein $w \in H$ mit $l(v) = \langle v, w \rangle$ für alle $v \in V$. Die Existenz von $w \in H$ mit $B[v,w] = l(v)$ für alle $v \in V$ ist daher äquivalent zur Gleichung $\langle v, w \rangle = \langle v, Au \rangle$ für alle $v \in H$, also $Au = w$. Betrachten Sie nun zu einem passenden $\rho > 0$ den Operator $T: H \to H,\ u \mapsto u - \rho(Au - w)$ und verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Lösungsvorschlag: Wir folgen den Hinweisen in der Aufgabenstellung. Zunächst ist zu $u \in H$ die Abbildung $v \to B[v,u]$ $(v \in H)$ linear. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein $w_u \in H$, sodass $B[v,u] = \langle v, w_u \rangle_H$ für alle $v \in H$ gilt. Die Abbildung $A: u \to w_u$ ist linear und beschränkt, denn:

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = |B[Au,u]| \leq C\|Au\|\,\|u\| \qquad (u \in H)$$

und weiter

$$\langle w, A(u+\lambda v) \rangle = B[w, u+v] = B[w,u] + \overline{\lambda} B[w,v] = \langle w, Au \rangle + \overline{\lambda}\langle w, Av \rangle = \langle w, Au + \lambda Av \rangle \qquad (w \in H)$$

Daher gilt $A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av$ für alle $u, v \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei nun $l \in H'$ vorgegeben, dann gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz ein $w \in H$ mit $l(v) = \langle v, w \rangle$ für alle $v \in H$. Damit ist die Existenz von $u \in H$ mit $B[v,u] = l(v)$ für alle $v \in H$ mit obiger Überlegung äquivalent dazu, dass es ein $w \in H$ gibt mit $\langle v, w \rangle = l(v) = B[v,u] = \langle v, Au \rangle$ für alle $v \in H$, das heißt $Aw = u$. Wir schreiben Die Gleichung nun ein wenig um:

$$Aw = u \;\Leftrightarrow\; Aw - u = 0 \;\Leftrightarrow\; -\rho(Aw - u) + w = w \text{ für ein } \rho > 0.$$

Betrachte die Gleichung also als Fixpunktproblem von $T: H \to H,\ w \mapsto w - \rho(Aw - u)$, so ist T eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned}\|Tv - Tw\|^2 &= \|v - \rho(Av - u) - (w - \rho(Aw - u))\|^2 \leq \|v - w - \rho A(v - w)\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 - 2\rho\Re\langle v - w, A(v - w)\rangle + \rho^2\|A(v - w)\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 - 2\rho\Re B[v - w, v - w] + \rho^2 C^2\|v - w\|^2 \leq (1 - 2\rho c + C^2\rho^2)\|v - w\|^2.\end{aligned}$$

Falls $\rho = c/C^2$ ist die Kontraktionskonstante $1 - c^2/C^2 < 1$ und damit der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar (H ist insbesondere eine vollständiger metrischer Raum). Die Existenz und Eindeutigkeit eines gewünschten w folgt.

Aufgabe 52

Sei $\Omega = (-1, 1)$. $u \in L^2(\Omega)$ definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} -1 & (-1 < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u nicht schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung in $L^2(\Omega)$ ist.

Lösungsvorschlag: Angenommen u ist schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $v \in L^2(\Omega)$, das heißt es gibt $v \in L^2(\Omega)$ mit

$$\int_{-1}^{1} v\phi \, dx = \int_{-1}^{0} \phi'(x) \, dx - \int_{0}^{1} \phi'(x) \, dx = -2\,\phi(0) \qquad (\phi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Betrachte eine ähnliche Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C_0^∞-Funktionen wie in Aufgabe 39, das heißt:

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n}\phi(\frac{x}{n}) \qquad \phi(x) := \begin{cases} e^{-1/1-x^2} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\|\phi_n\|_2 = 1$. Dann gilt aber für v:

$$\|v\| \geq |\langle \phi_n, v \rangle| = 2\phi_n(0) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Das heißt, $\|v\| = \infty$, was einen Widerspruch liefert.

Aufgabe 53

Beweisen Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann existiert ein $C_p > 0$ derart, dass

$$\|u\|_2 \leq C_p \|\nabla u\|_2 \qquad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für $u \in C_0^\infty(\Omega)$, indem Sie u außerhalb von Ω trivial fortsetzen und $u(\cdot, x_2, \cdots, x_n)$ (bei festem $(x_2, \cdots, x_n)$) mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ausdrücken.

Lösungsvorschlag: Die folgende Konstruktion liefert nur eine sehr grobe Konstante, die deutlich verbessert werden kann, wenn man mehr über das Gebiet weiß. Sie erleichtert jedoch die Rechnungen. Man wähle $a \in \mathbb{R}$, sodass $\Omega \subseteq (-a, a)^n$ Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist dist $(\text{supp}\phi, \partial(-a, a)^2) > 0$ und ϕ kann zu einer $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktion durch $\phi(x) = 0$ für $x \notin \Omega$ fortgesetzt werden. Diese wird auch mit ϕ bezeichnet. Dann gilt mittels Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^2 &= \int_{-a}^{x} 2\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n) \partial_{x_1} \overline{\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)} \, d\xi_1 \\ &\leq \int_{-a}^{x} \left(\frac{1}{4a} |\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 + a |\partial_{x_1} \phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 \right) d\xi_1 \\ &\leq \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{4a} |\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 + a |\partial_{x_1} \phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 \right) d\xi_1 \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Integriert man nun beide Seiten über $(-a,a)^n$, so erhält man:

$$\int_{(-a,a)^n} |\phi(x)|^2\,dx \leq \int_{-a}^{a} \left(\int_{(-a,a)^n} \left(\frac{1}{4a}|\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 + 4a|\partial_{x_1}\phi(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 \right) d\xi_1 dx_2 \cdots dx_n \right) dx_1$$
$$= 2a \int_{(-a,a)^n} \left(\frac{1}{4a}|\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 + 4a|\partial_{x_1}\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 \right) dx$$

Da $\phi = 0$ auf $(-a,a)^n \setminus \Omega$ gilt, erhält man schließlich

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq 4a\|\partial_{x_1}\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq 4a\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \qquad (\phi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Sei nun $\phi \in H_0^1(\Omega)$, das heißt, es existiert eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\phi_n \to \phi$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere konvergiert dann $\|\phi_n - \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ und $\|\nabla(\phi_n - \phi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Da $4a\|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \|\nabla\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt das auch für den Grenzwert.

Aufgabe 54

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $K : H \to H$ ein symmetrischer und beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass für die Norm von K dann gilt:

$$\|K\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle Ku, u\rangle}{\langle u, u\rangle}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $\mu > 0$ den Ausdruck

$$\langle K(\mu u + \frac{1}{\mu}Ku), \mu u + \frac{1}{\mu}Ku\rangle - \langle K(\mu u - \frac{1}{\mu}Ku), \mu u - \frac{1}{\mu}Ku\rangle.$$

Lösungsvorschlag: Zunächst muss ich korrigieren, dass die Aufgabe eigentlich lauten muss:

$$\|K\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|\langle Ku, u\rangle|}{\langle u, u\rangle}.$$

Die Richtung $\|K\| \geq$ rechte Seite ist klar, denn $|\langle Ku, u\rangle| \leq \sup\{\|v\| = 1\}|\langle Ku, v\rangle| = \|Ku\|^2$. (Cauchy-Schwarz). Für die Rückrichtung benutzen wir den Term aus dem Hinweis und stellen fest:

$$\langle K(\mu u + \frac{1}{\mu}Ku), \mu u + \frac{1}{\mu}Ku\rangle - \langle K(\mu u - \frac{1}{\mu}Ku), \mu u - \frac{1}{\mu}Ku\rangle = 4\|Ku\|^2$$

wegen der Symmetrie von K. Da K kompakt ist, ist entweder $\|K\|$ oder $-\|K\|$ ein Eigenwert. Wähle $\mu^2 = \|K\|$, dann wird einer der Skalarprodukte im Term aus dem Hinweis 0. Man erhält dann

$$\begin{aligned}\|Ku\|^2 &\leq \left|\frac{1}{4}\langle K(\mu u \mp \frac{1}{\mu}Ku), \mu u \mp \frac{1}{\mu}Ku\rangle\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\mu^2|\langle Ku, u\rangle| + 2\|Ku\|^2 + \frac{1}{\mu^2}|\langle K^2u, Ku\rangle| \\ &\leq \frac{1}{4}\|K\|\langle Ku, u\rangle + \frac{1}{4\|K\|}|\langle K^2u, Ku\rangle| + \frac{1}{2}\|Ku\|^2.\end{aligned}$$

Mittels

$$\sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|\langle K^2u, Ku\rangle|}{\langle u, u\rangle} = \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|\langle K^2u, Ku\rangle|}{\langle Ku, Ku\rangle}\frac{|\langle Ku, Ku\rangle|}{\langle u, u\rangle} \leq \|K\| \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|\langle Ku, u\rangle|}{\langle u, u\rangle}$$

ergibt sich dann $\|K\| \leq \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|\langle Ku,u\rangle|}{\langle u,u\rangle}$.