Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 13

Abgabe: 17.07.2015 - 10Uhr

Aufgabe 51

Beweisen Sie das Lemma von Lax-Milgram: Sei $B : H \times H \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform. Es gelte mit Konstanten $C, c > 0$:

- $|B[u,v]| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \qquad (u, v \in H)$.
- $\operatorname{Re}(B[u,u]) \geq c\|u\|^2 \qquad (u \in H)$.

Dann gibt es zu jedem $l \in H'$ ein eindeutiges $w \in H$, sodass $B[v,w] = l(v)$ für alle $v \in H$ gilt.

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor: Zu jedem $u \in H$ ist $f_u : v \mapsto B[u,v]$ ein lineares, beschränktes Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es also ein $w_u \in H$, sodass $f_u(v) = \langle v, w_u \rangle$ für alle $v \in H$ gilt. Beweisen Sie, dass der Operator $A : H \to H,\ u \mapsto w_u$ linear und beschränkt ist. Ferner gibt es zu $l \in H'$ ein $w \in H$ mit $l(v) = \langle v, w \rangle$ für alle $v \in V$. Die Existenz von $w \in H$ mit $B[v,w] = l(v)$ für alle $v \in V$ ist daher äquivalent zur Gleichung $\langle v, w \rangle = \langle v, Au \rangle$ für alle $v \in H$, also $Au = w$. Betrachten Sie nun zu einem passenden $\rho > 0$ den Operator $T : H \to H,\ u \mapsto u - \rho(Au - w)$ und verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 52

Sei $\Omega = (-1,1)$. $u \in L^2(\Omega)$ definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} -1 & (-1 < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u nicht schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung in $L^2(\Omega)$ ist.

Aufgabe 53

Beweisen Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann existiert ein $C_p > 0$ derart, dass

$$\|u\|_2 \leq C_p \|\nabla u\|_2 \qquad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für $u \in C_0^\infty(\Omega)$, indem Sie u außerhalb von Ω trivial fortsetzen und $u(\cdot, x_2, \cdots, x_n)$ (bei festem $(x_2, \cdots, x_n)$) mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ausdrücken.

Bitte wenden.

Aufgabe 54

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $K : H \to H$ ein symmetrischer und beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass für die Norm von K dann gilt:

$$\|K\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle Ku, u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $\mu > 0$ den Ausdruck

$$\langle K(\mu u + \frac{1}{\mu} Ku), \mu u + \frac{1}{\mu} Ku \rangle - \langle K(\mu u - \frac{1}{\mu} Ku), \mu u - \frac{1}{\mu} Ku \rangle.$$