Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 14

Abgabe: nie

Aufgabe 55

Beweisen Sie Satz 14.2 aus der Vorlesung: Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein separabler Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer, beschränkter und symmetrischer Operator.

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert und v, w Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ bzw μ. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\langle v, w \rangle = 0$.

b) Sei nun zusätzlich T kompakt. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von T keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt haben. Ferner hat jeder von 0 verschiedene Eigenwert endliche Vielfachheit.

c) Sei T wieder kompakt. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von T wie folgt geordnet werden können: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$

Lösungsvorschlag zu a): Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit Eigenelement $v \in H$ mit $\|v\| = 1$, dann gilt:

$$\lambda = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \overline{\lambda}.$$

Sei weiter $\mu \neq \lambda$, dann gilt:

$$\mu \langle v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle = \lambda \langle v, w \rangle.$$

Da $\mu \neq \lambda$ folgt $\langle v, w \rangle = 0$. Der Rest der Aufgabe ist im Skript auf Seite 81 und folgende nachzulesen.

Aufgabe 56

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein separabler Hilbertraum und $U \subset H$ sei ein Unterraum. Sei $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H derart, dass für jedes $u \in U$ gilt:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle u, \phi_k \rangle \phi_k. \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass die Darstellung (1) dann auch für alle $u \in \overline{U}$ gilt.

Lösungsvorschlag: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $u \in \overline{U}$ und $v \in U$ mit $\|u - v\| < \varepsilon/2$. Da $v \in U$ gibt es eine Darstellung $v = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \langle v, \phi_k \rangle \phi_k$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|v - \sum\limits_{k=1}^{m} \langle v, \phi_k \rangle \phi_k\| < \varepsilon/2$ für alle $m \geq N$. Dann gilt:

$$\|u - \sum_{k=1}^{m} \langle u, \phi_k \rangle \phi_k\| \leq \|u - \sum_{k=1}^{m} \langle v, \phi_k \rangle \phi_k\| \leq \|u - v\| + \|v - \sum_{k=1}^{m} \langle v, \phi_k \rangle \phi_k\| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert $\sum_{k=1}^{m} \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$ gegen u für $m \to \infty$.

Aufgabe 57

Beweisen Sie Korollar 14.6 aus der Vorlesung: Sei $K : H \to H$ ein symmetrischer und kompakter

Operator, dann existiert eine Orthonormalbasis von H aus Eigenvektoren von K.

Siehe Skript Seite 84 und folgende.

Aufgabe 58

Zeigen Sie, dass der Unterraum der kompakten Operatoren abgeschlossen im Banachraum der linearen beschränkten Operatoren ist.

Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Operatoren mit $K_n \to K$ in $B(H)$. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Es ist zu zeigen, dass $(Ku_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wähle sukzessive Teilfolgen aus $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt. Wähle zunächst eine Teilfolge (auch mit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet), sodass $(K_1 u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wähle anschließend davon eine Teilfolge, sodass $(K_2 u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und so weiter. Die daraus entstandene Folge hat die Eigenschaft, dass das Bild unter K_n für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Wir behaupten, dass dann auch das Bild unter K der Folge konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|K_n - K\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ mit $M \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|$. Wähle anschließend $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|K_n u_k - K_n u_l\| < \varepsilon/2$ für alle $k, l \geq N$. Dann gilt:

$$\|Ku_k - Ku_l\| \leq \|K - K_l\|\|u_k\| + \|K_n u_k - K_n u_l\| + \|K - K_n\|\|u_l\| < \varepsilon.$$

Damit ist $(Ku_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und konvergiert folglich.

Aufgabe 59

Sei $G \in L^2((a,b)^2)$ und

$$K : L^2(a,b) \to L^2(a,b),\ (Kf)(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\, dy,$$

Beweisen Sie, dass K ein kompakter Operator ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Approximieren Sie G bezüglich $\|\cdot\|_{L^2((a,b)^2)}$ durch eine Folge $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen über Quadern. Zeigen Sie, dass die Operatoren $K_j : L^2(a,b) \to L^2(a,b),\ (K_j f)(x) = \int_a^b G_j(x,y) f(y)\, dy,$ für alle $j \in \mathbb{N}$ endlichdimensionale Bilder haben.

- Zeigen Sie, dass K_j kompakt ist $(j \in \mathbb{N})$.

- Beweisen Sie, dass $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm gegen K konvergiert.

- Schließen Sie mit Aufgabe 58, dass K kompakt ist.

Lösungsvorschlag: Sei $G \in L^2(a,b)$ Treppenfunktion über Quadern $(a_k, b_k) \times (c_k, d_k)$ für $a_k < b_k, c_k < d_k \in \mathbb{R}$ für alle $n = 1 \cdots N$. Charakteristische Funktionen über diesen Quadern lassen sich schreiben als $\chi_{(a_k,b_k)\times(c_k,d_k)}(x,y) = \chi_{(a_k,b_k)}(x) \cdot \chi_{(c_k,d_k)}(y)$ für alle $x, y \in (a,b)$. Das heißt es gibt eine Darstellung von K gemäß

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{(a_k,b_k)}(x) \cdot \chi_{(c_k,d_k)}(y) \qquad (x, y \in (a,b)).$$

Dann ist Bild $(K) = LH[\chi_{(a_k,b_k)}(x) : k = 1 \cdots N]$, denn

$$Kf(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_a^b \chi_{(c_k,d_k)}(y) f(y)\, dy\ \chi_{(a_k,b_k)}(x) \qquad (f \in L^2(a,b)).$$

Damit hat K endlich-dimensionales Bild. Daraus folgt auch, dass K kompakt ist. Für jede beschränkte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $(Kf_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in einem endlich dimensionalen Hilbertraum. Nach Bolzano-Weierstraß hat diese Folge eine konvergente Teilfolge.
Sei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Operatoren wie oben mit Kernen G_j, wobei $G_j \to G$ in $L^2((a,b)^2)$. Dann gilt:

$$\sup_{f\in L^2(a,b)\setminus\{0\}} \frac{\|K_j f - Kf\|_{L^2(a,b)}}{\|f\|_{L^2(a,b)}} = \|f\|_{L^2(a,b)}^{-2} \left(\int_a^b \left| \int_a^b (G_j(x,y) - G(x,y)) f(y)\, dy \right|^2 dx \right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\int_a^b \int_a^b |G_j(x,y) - G(x,y)|^2 \, dx dy \right)^{1/2} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

Mit Aufgabe 58 ist K als Limes von kompakten Operatoren auch kompakt.