Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 14

Abgabe: nie

Aufgabe 55

Beweisen Sie Satz 14.2 aus der Vorlesung: Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein separabler Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer, beschränkter und symmetrischer Operator.

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert und v, w Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ bzw μ. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\langle v, w\rangle = 0$.

b) Sei nun zusätzlich T kompakt. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von T keinen von 0 verschiedenen Häufungspunkt haben. Ferner hat jeder von 0 verschiedene Eigenwert endliche Vielfachheit.

c) Sei T wieder kompakt. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von T wie folgt geordnet werden können: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$

Aufgabe 56

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein separabler Hilbertraum und $U \subset H$ sei ein Unterraum. Sei $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H derart, dass für jedes $u \in U$ gilt:

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle u, \phi_k\rangle \phi_k. \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass die Darstellung (1) dann auch für alle $u \in \overline{U}$ gilt.

Aufgabe 57

Beweisen Sie Korollar 14.6 aus der Vorlesung: Sei $K : H \to H$ ein symmetrischer und kompakter Operator, dann existiert eine Orthonormalbasis von H aus Eigenvektoren von K.

Aufgabe 58

Zeigen Sie, dass der Unterraum der kompakten Operatoren abgeschlossen im Banachraum der linearen beschränkten Operatoren ist.

Aufgabe 59

Sei $G \in L^2((a,b)^2)$ und

$$K : L^2(a,b) \to L^2(a,b),\ (Kf)(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\, dy,$$

Beweisen Sie, dass K ein kompakter Operator ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Approximieren Sie G bezüglich $\|\cdot\|_{L^2((a,b)^2)}$ durch eine Folge $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen über Quadern. Zeigen Sie, dass die Operatoren $K_j : L^2(a,b) \to L^2(a,b), (K_j f)(x) = \int_a^b G_j(x,y) f(y)\, dy,$ für alle $j \in \mathbb{N}$ endlichdimensionale Bilder haben.

- Zeigen Sie, dass K_j kompakt ist $(j \in \mathbb{N})$.
- Beweisen Sie, dass $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm gegen K konvergiert.
- Schließen Sie mit Aufgabe 58, dass K kompakt ist.