Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 3

Abgabe: 08.05.2015 - 10Uhr

Aufgabe 9

Betrachten Sie das Verfolger-Beute-System

$$\dot{x} = a_1 x - a_2 xy, \qquad \dot{y} = -a_3 y + a_4 xy,$$

mit Konstanten $a_i > 0,\ i = 1,2,3,4$ und erstem Integral

$$H(x,y) = a_4 x - a_3 \log x + a_2 y - a_1 \log y.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Niveaumengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ :\ H(x,y) = \alpha\}$ sind für $\alpha > H\left(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2}\right)$ geschlossene Kurven, welche den stationären Punkt $\left(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2}\right)$ umrunden. Desweiteren sind die Subniveaumengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ :\ H(x,y) \leq \alpha\}$ konvex.

b) Alle (positiven) Lösungen $(x(t), y(t))$ des Verfolger-Beute-Systems sind periodisch. x nimmt sein Minimum und Maximum in den Punkten t mit $y(t) = \frac{a_1}{a_2}$ an; y nimmt sein Minimum und Maximum in den Punkten t mit $x(t) = \frac{a_3}{a_4}$ an.

Aufgabe 10

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -x \qquad \dot{y} = -2y.$$

Zeigen Sie, dass jedes erste Integral dieses Systems eine konstante Funktion ist und damit keine Informationen über die Trajektorien liefert.

Aufgabe 11

Gegeben sei die Matrixfunktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Weisen Sie nach, dass (trotz zweier negativer Eigenwerte der Matrix $A(t)$) die triviale Lösung $(0,0)^T$ des folgenden Systems instabil ist:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Untersuchen Sie die triviale Lösung $(0,0)^T$ bei den folgenden Differentialgleichungssystemen auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität und skizzieren Sie Phasendiagramme:

a) $\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = 4x + 3y$

b) $\dot{x} = -x + y,\ \dot{y} = -4x - 5y$

c) $\dot{x} = 2x - 4y,\ \dot{y} = 2x - 2y$