Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 4

Ergänzung zur Übung

Aufgabe 13

Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Zeigen Sie, dass für das lineare System

$$\dot{y} = A(t)y$$

der Begriff der Stabilität der trivialen Lösung mit dem Begriff der Stabilität im Sinne von Lyapunov der trivialen Lösung übereinstimmt.

Beweis ("$\Rightarrow$"): Sei $\overline{y}$ die triviale Lösung und sei $\overline{y}$ stabil. Sei $\tilde{y}_1, .., \tilde{y}_n$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}$. Definiere $y_j := (\|\tilde{y}_j(0)\|)^{-1}\tilde{y}_j$ für $j = 1, .., n$. Da $\overline{y}$ stabil ist, gibt es $C_j > 0$, $j = 1, .., n$. mit $\|y_j(t)\| \leq C_j,\ \forall t \in [0, \infty)$ und alle $j = 1, .., n$. Definiere $C := \max_{j=1}^n C_j$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $\delta := \varepsilon C^{-1} n^{-1/2}$. Für beliebiges $y \in B_\delta := \{y \in \mathcal{L} : \|y(0)\| \leq \delta\}$ gibt es $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, .., n$, sodass y der Darstellung $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$ genügt. Dann gilt:

$$\delta > \|y(0)\| \geq \max_{j=1}^{n} |\alpha_j| \geq n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Daraus folgt für $\|y(t)\|$:

$$\|y(t)\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \|y_j(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\delta\sqrt{n} = \varepsilon.$$

$\overline{y}$ ist also Lyapunov-stabil. □