

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 4

Abgabe: 15.05.2015 - 10Uhr

Aufgabe 13

Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Zeigen Sie, dass für das lineare System

$$\dot{y} = A(t)y$$

der Begriff der Stabilität der trivialen Lösung mit dem Begriff der Stabilität im Sinne von Lyapunov der trivialen Lösung übereinstimmt.

Aufgabe 14

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, vektorwertige Funktion. Sei weiter $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Trajektorien der Probleme $\dot{y} = f(y)$ und $\dot{y} = \alpha(y)f(y)$ übereinstimmen.

Aufgabe 15

Betrachten Sie das (nichtlineare) Differentialgleichungssystem $\dot{y} = f(t, y)$ mit einer stetigen Funktion $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es existiere ein erstes Integral H (definiert analog zum Fall $n = 2$) für das System. Zudem sei vorausgesetzt, dass das System eine stationäre Lösung \bar{y} besitzt, deren Funktionswert ein isoliertes Minimum für H ist. Zeigen Sie, dass \bar{y} stabil im Sinne von Lyapunov ist. Ist \bar{y} asymptotisch stabil?

Aufgabe 16

Untersuchen Sie die stationären Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme auf Stabilität:

a) $\dot{x} = -x - y - (x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x - y + (x^2 + y^2)$

b) $\dot{x} = x + y + 2, \quad \dot{y} = -x^2 + y + 4$

c) $\dot{x} = 2x(y - x), \quad \dot{y} = y(3y - 4x).$