Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 5

Abgabe: 22.05.2015 - 10Uhr

Aufgabe 17

Überführen Sie die Van-der-Pool-Gleichung $\ddot{x} = \varepsilon(1-x^2)\dot{x} - x$ in ein System erster Ordnung und untersuchen Sie die stationären Lösungen auf Stabilität. Zeichnen Sie ferner ein Phasendiagramm.

Zur Stabilitätsuntersuchen von stationären Lösungen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichung kann das Resultat aus Aufgabe 15 erweitert werden, um sich von der Existenz eines ersten Integrals zu lösen. Zu diesem Zweck definiert man den Begriff der Lyapunov-Funktion wie folgt: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und das Differentialgleichungssystem $\dot{y} = f(y)$ besitze eine stationäre Lösung $\overline{y}$ (Wir verzichten im Folgenden zur Vereinfachung der Notation auf eine Unterscheidung der konstanten Funktion von ihrem Funktionswert).

Definition 1 *Eine Lyapunov-Funktion zu $\overline{y}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

i) L hat in $\overline{y}$ ein isoliertes Minimum mit $L(\overline{y}) = 0$.

ii) die Ableitung von L entlang f, definiert durch $\partial_f L := \langle \nabla L, f \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ist nichtnegativ auf ganz $\mathbb{R}^n$ oder nichtpositiv auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 18

a) Betrachten Sie wie in Aufgabe 15 das (nichtlineare) Differentialgleichungssystem $\dot{y} = f(y)$ mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Es existiere ein erstes Integral H für das System. Zudem sei vorausgesetzt, dass das System eine stationäre Lösung $\overline{y}$ besitzt, deren Funktionswert ein isoliertes Minimum für H ist. Zeigen Sie, dass $H - H(\overline{y})$ eine Lyapunov-Funktion ist zu $\overline{y}$ ist.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $x \cdot g(x)$ nichtpositiv oder nichtnegativ. Zeigen Sie, dass $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y) = x^2 + y^2$ eine Lyapunov-Funktion zur stationären Lösung $(0, 0)^T$ des Lienardschen Systems

$$\dot{x} = -\sqrt{C/L}\, g(x) + y, \ \dot{y} = -x$$

ist. Ist L ein erstes Integral?

Aufgabe 19

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion und das Differentialgleichungssystem $\dot{y} = f(y)$ besitze eine stationäre Lösung $\overline{y}$. Ferner existiere eine Lyapunov-Funktion zu $\overline{y}$. Beweisen Sie:

a) Falls $\partial_f L \leq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, so ist $\overline{y}$ stabil (analog zu Aufgabe 15).

b) Falls $\partial_f L < 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{y}\}$, so ist $\overline{y}$ asymptotisch stabil.

c) Falls $\partial_f L > 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{y}\}$, so ist $\overline{y}$ instabil.

Aufgabe 20

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion mit $g(0) = 0$ und es gelte $x \cdot g(x) < 0$ für alle $x \neq 0$. Überführen Sie das Problem $\ddot{x} = g(x)$ in ein System erster Ordnung und untersuchen Sie dessen stationäre Lösung(en) auf Stabilität.