

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 6

Abgabe: 29.05.2015 - 10Uhr

Aufgabe 21

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = -y - x^3$, $\dot{y} = x - y^3$

- Welche Aussage liefert die Untersuchung der Linearisierung in den stationären Lösungen über deren Stabilität?
- Weisen Sie mit geeigneten Lyapunov-Funktionen nach, dass alle stationäre Lösungen asymptotisch stabil sind.

Aufgabe 22

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \eta_1, \eta_2$ für die eindeutige Lösbarkeit des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{cases} u'' & = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) & = \eta_1 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) & = \eta_2. \end{cases}$$

Aufgabe 23

Sei $T > 0$ und $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, T -periodische Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- $\omega \notin \left\{ \frac{2\pi n}{T} : n \in \mathbb{Z} \right\}$
- Das folgende Randwertproblem (mit periodischen Randbedingungen) ist eindeutig lösbar:

$$\begin{cases} u'' + \omega^2 u & = r \\ u(0) & = u(T) \\ u'(0) & = u'(T). \end{cases}$$

Aufgabe 24

Zeigen Sie, dass das inhomogene Randwertproblem

$$\begin{cases} xu'' + u' & = 0 \\ u(0) & = 0 \\ u(1) & = 1 \end{cases}$$

keine Lösung hat, obwohl nur die triviale Lösung dem zugehörigen homogenen Problem genügt. Diskutieren Sie dies im Hinblick auf den Alternativsatz.