Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 7

Abgabe: 05.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 25

Für $\theta \in [0, 2\pi)$ betrachten Sie das folgende quasiperiodische Randwertproblem auf $[0,1]$:

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u &= r \\ u(1) &= e^{i\theta} u(0) \\ u'(1) &= e^{i\theta} u'(0), \end{cases}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $r \in C([0,1])$. Entscheiden Sie, für welche λ abhängig von θ das Problem eine (eindeutige) Lösung für jedes r besitzt. Berechnen Sie für solche λ die Green-Funktion zu $(-u'' - \lambda u,\ u(1) - e^{i\theta}u(0),\ u'(1) - e^{i\theta}u'(0))$.

Aufgabe 26

Betrachten Sie das Randwertproblem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} L[u] &= r \\ R_1[u] &= \gamma_1 \\ R_2[u] &= \gamma_2, \end{cases}$$

mit $L[u](x) = a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x)$ für $x \in [a,b]$, sowie den separierten Randoperatoren $R_1[u] = -\alpha_0 u'(a) + \beta_0(a)$, $R_2[u] = \alpha_1 u'(b) + \beta_1 u(b)$. Dabei sind $a_0, a_1, a_2 \in C([a,b])$, $a_2(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$ und $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$. Nehmen Sie an, dass das Randwertproblem für jedes $r \in C([a,b])$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2([a,b])$ hat. Sei $W : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \phi(x) & \psi(x) \\ \phi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems (ϕ, ψ), wobei ϕ, ψ die Lösungen der Gleichung $L[u] = 0$ mit den Zusatzbedingungen $R_1[\phi] = 0,\ R_2[\phi] = 1,\ R_2[\psi] = 1,\ R_2[\psi] = 0$ sind. Beweisen Sie, dass die Green-Funktion zu (L, R_1, R_2) dann gegeben ist durch:

$$G(x,t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} \begin{cases} \phi(x)\psi(t) & (a \le x \le t \le b) \\ \phi(t)\psi(x) & (a \le t \le x \le b). \end{cases}$$

Aufgabe 27

Sei $c > 0$. Beweisen Sie, dass das inhomogen Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = x^2 & ((x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)) \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ besitzt. Berechnen Sie anschließend die Lösung, indem Sie zunächst eine zeitunabhängige Lösung der partiellen Differentialgleichung berechnen.
Bitte wenden.

Aufgabe 28

Betrachten Sie die dreidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) := u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t) \qquad (x,t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0,\infty)$$

und geben sie alle rotationssymmetrischen (bzgl. x) Lösungen $u \in C^2((\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times [0,\infty))$ an. Das heißt, finden Sie alle Lösungen u von der Form $u(x,t) = w(r,t)$ mit $r = \|x\|$.
Hinweis: Führen Sie die Gleichung mit einer Transformation in Kugelkoordinaten auf ein eindimensionales Problem für w zurück. Verwenden Sie anschließend den Ansatz $h(r,t) := r\,w(r,t)$, um das Problem auf die Untersuchung einer eindimensionalen Wellengleichung zu reduzieren.