Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 8

Abgabe: 12.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 29

a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum und sei $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugte Norm. Zeigen Sie, dass dann die Parallelogrammgleichung gilt, das heißt

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad (u, v \in V).$$

b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt. Zeigen Sie, dass auf V wie folgt ein inneres Produkt definiert werden kann:

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \qquad (u, v \in V),\ \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right) \qquad (u, v \in V),\ \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie ferner, dass $\|\cdot\|$ von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugt wird.

Aufgabe 30

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum. Sei weiter $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Wir sagen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach/im schwachen Sinne gegen ein $u \in V$ für $k \to \infty$ (Schreibweise: $u_k \rightharpoonup u$), falls für alle $v \in V$ gilt:

$$\langle u_k, v\rangle \to \langle u, v\rangle \qquad (k \to \infty).$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $u_k \to u$ für $k \to \infty$, so gilt $u_k \rightharpoonup u$ für $n \to \infty$.

b) Der schwache Grenzwert ist eindeutig.

c) Ist $V = \mathbb{K}^n$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das kanonische innere Produkt, so gilt $u_k \rightharpoonup u$ genau dann wenn $u_k \to u$.

Aufgabe 31

Im unitären Raum $(C[0, 2\pi], \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ mit

$$\langle u, v\rangle_2 := \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\, dx$$

betrachten wir die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_k(x) := e^{ikx}$ $(x \in [0, 2\pi],\ k \in \mathbb{N})$. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und auf schwache Konvergenz. Sie dürfen ohne Beweis benutzen: Für jedes $v \in C[0, 2\pi]$ gilt:

$$\langle v, v\rangle_2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} v(x) e^{ikx}\, dx \right|^2.$$

Aufgabe 32

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$ derart, dass $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Seien $u, v \in \mathbb{K}^n$, dann gilt:

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q,$$

wobei $uv \in \mathbb{K}^n$ definiert ist durch $(uv)_k := u_k v_k$ für alle $k = 1, .., n$.

b) Seien $u, v \in \mathbb{K}^n$ mit $u_k \neq 0$ für alle $k = 1, .., n$. Dann gilt für alle $r < 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^r \right)^{1/r} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^{-\frac{r}{1-r}} \right)^{-\frac{1-r}{r}}$$

c) Sei $u \in \mathbb{K}^n$ und seien $1 \leq q \leq r \leq p$. Sei $\theta \in [0, 1]$ so gewählt, dass gilt: $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}.$$