Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 9

Abgabe: 19.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 33

a) Sei für $1 \leq p \leq \infty$ der Folgenraum l_p wie in der Vorlesung definiert. Beweisen Sie

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p \qquad (u \in l^p)$$

für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und damit $l_p \subseteq l_q$. Zeigen Sie ferner $l_p \subsetneqq l_q$ für $p < q$.
Kann man die Definition der normierten Räume $(l_p, \|\cdot\|)$ analog auf den Fall $0 < p < 1$ erweitern?

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie, dass $L^q(\Omega) \subsetneqq L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt und dass es ein $C > 0$ gibt, sodass $\|u\|_p \leq C\|u\|_q$ für alle $u \in L^q(\Omega)$ gilt. Gilt dies auch für $\Omega = \mathbb{R}$?

Aufgabe 34

Beweisen Sie, dass l^∞ vollständig ist.

Aufgabe 35

Beweisen Sie, dass $(C[-1,1], \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$ kein Banachraum ist, indem Sie zeigen, dass die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C[-1,1]$ definiert durch

$$u_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ kx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

zwar eine Cauchy-Folge ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe 35

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_p$ des normierten Raumes $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ für $p \neq 2$ nicht von einem inneren Produkt erzeugt wird.