KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 16.4.2010
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Funktionentheorie I

1. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 23.4.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (K) (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1-2i)^3, \qquad \frac{5+4i}{4+(1+i)^2}, \qquad \left(-\sqrt{3}+i\right)^{42}, \qquad \sum_{k=0}^{23}(2i)^k.$$

b) Bestimmen Sie *jeweils* alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$z^3-5z^2+9z-5=0, \qquad z^3=\frac{2+10i}{2-3i}, \qquad z^2-4\bar{z}+4=0.$$

Hinweis: $\sin(\pi/12)=(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}/4$, $\cos(\pi/12)=(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}/4$

c) Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$\{z\in\mathbb{C}: 1<\mathrm{Re}(iz)<3\}, \qquad \{z\in\mathbb{C}: |z-i|\geq 1 \text{ und } |z-1-2i|<3\},$$
$$\{z\in\mathbb{C}: |z+1+i|=|z-3-3i|\}, \qquad \{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}(z^2)\leq 1\}.$$

Aufgabe 2 (K) (5 Punkte)

Es seien $a,z\in\mathbb{C}$ mit $|a|<1$. Zeigen Sie:

a) $|z-a|<|1-\bar{a}z| \iff |z|<1$,

b) Ist $|z|\leq 1$, dann gilt $\dfrac{\big||z|-|a|\big|}{1-|az|}\leq\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$.

Aufgabe 3

Es seien $n\in\mathbb{N}$, $\zeta_n:=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie, daß für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt:

$$1+\zeta_n^m+\zeta_n^{2m}+\cdots+\zeta_n^{(n-1)m}=\begin{cases} n, & \text{falls } n\,|\,m \ \ (\text{„}n \text{ teilt } m\text{“}),\\ 0, & \text{falls } n\nmid m \ \ (\text{„}n \text{ teilt } m \text{ nicht“}).\end{cases}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(n\varphi) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k} (\sin\varphi)^k,$$

$$\sin(n\varphi) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k} (\sin\varphi)^k.$$

Aufgabe 5

Es sei $D \subset M \subset \mathbb{C}$. Weiter sei D diskret in M, d.h. D habe in M keine Häufungspunkte. Zeigen Sie:

a) $D^\circ = \emptyset$.

b) D ist abzählbar.

c) D ist genau dann endlich, wenn D kompakt ist.

d) D ist diskret in sich, aber im Allgemeinen nicht in $\mathbb{C}$.

Wichtige Hinweise:

- Informationen zur Vorlesung finden Sie im WWW unter der Adresse: `http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/ft12010s`
- Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann im Allianzgebäude im 3. Stock (beim Fahrstuhl, Gebäudeteil „A“) abgeholt oder von der oben genannten WWW-Seite heruntergeladen werden.
- Auf jedem Übungsblatt sind Aufgaben mit „**K**“ gekennzeichnet; diese können Sie zur Korrektur abgeben. Dazu werfen Sie ihre Bearbeitungen bitte in den gekennzeichneten Einwurfschlitz neben Zimmer 3A-03 im 3. Stock des Allianzgebäudes. Das jeweilige Abgabedatum ist auf den Ubungsblättern vermerkt.
- Ihre korrigierten Abgaben finden Sie im entsprechenden Kasten neben Zimmer 3A-15.
- Zum Erwerb eines **Übungsscheines** sind jeweils 50 Prozent der Gesamtpunktzahl aus den K-Aufgaben der Übungsblätter 1 bis einschließlich 6 und der restlichen Übungsblätter hinreichend. Der Übungsschein wird benotet.
- Die studienbegleitende Prüfung sowie die (Physiker-)Modulprüfung zur Funktionentheorie findet als **Klausur** statt. Termin und Details werden noch bekanntgegeben.