KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 23.4.2010
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Funktionentheorie I

2. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 30.4.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 6 (K) (5 Punkte)

a) Es sei $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z_k \geq 0$, und die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^2$ seien konvergent. Zeigen Sie, daß dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^2$ konvergiert, und geben Sie ein Beispiel an, für das unter obigen Voraussetzungen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ nicht konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Aufgabe 7 (K) (5 Punkte)

Für jedes $c \in \mathbb{C}$ sei die (komplexwertige) Folge $(a_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definiert durch

$$a_0^{(c)} := 0, \qquad a_{n+1}^{(c)} := (a_n^{(c)})^2 + c \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Weiter sei $M := \{\, c \in \mathbb{C} : (a_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ ist beschränkt} \,\}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt $c \in M$ so, daß die Folge $(a_n^{(c)})$ nicht konvergent ist.

b) Sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_N^{(c)}| > 2$, dann ist die Folge $(a_n^{(c)})$ unbeschränkt.

c) M ist kompakt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung verwenden, daß für ein Polynom p (mit komplexwertigen Koeffizienten) die Menge $\{\, z \in \mathbb{C} : |P(z)| > 2 \,\}$ offen ist.

d) $\max\{\, |c| : c \in M \,\} = 2$.

Aufgabe 8

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und es gebe ein c so, daß $|\operatorname{Arg} a_n| \leq c < \frac{\pi}{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt ihre absolute Konvergenz.
Geben Sie ein Gegenbeispiel dafür an, daß es nicht ausreicht, nur $|\operatorname{Arg} a_n| < \frac{\pi}{2}$ zu fordern.

— bitte wenden —

Aufgabe 9

Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren bzw. divergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2n+3i}{n-ni}\Big)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{3i}\Big)^n \Big(1+\frac{i}{n}\Big)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+i}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^n \frac{(in)^{n-1}}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-in}.$$

Aufgabe 10

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $\cosh z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Zeigen Sie:

a) $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$,

b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

c) Die Reihen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konvergieren absolut und es gilt:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

d) Es gilt $|\sin z|^2 = \sin^2(\operatorname{Re} z) + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an mit $|\sin(in)| > 42$.