KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
30.4.2010

Funktionentheorie I

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 7.5.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 11 (K) (5 Punkte)

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen im Punkt 0 stetig sind.

$$f_i(0) := 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ und}$$

$$f_1(z) := z^{-1} \operatorname{Im} z, \quad f_2(z) := z^{-2} \operatorname{Im} z^2, \quad f_3(z) := z^{-2} (\operatorname{Im} z^2)^2 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

b) Zeigen Sie, daß es keine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 12 (K) (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die Funktion $f(z) = \overline{z}^2$, $z \in \mathbb{C}$, komplex differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, daß eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ genau dann in $a \in D$ komplex differenzierbar ist, falls die Funktion $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ in $\overline{a} \in D^* := \{\, \overline{z} : z \in D \,\}$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 13

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{C}$ eine auf I definierte Funktion. Zeigen Sie, daß f genau dann in a komplex differenzierbar ist, wenn $\operatorname{Re} f : I \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar sind.

— bitte wenden —

Aufgabe 14

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\cos z = \frac{1}{2}$.

b) Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r > 0$. Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{1/z} = w$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leq r$ besitzt.

c) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i\,, \qquad i^{1/i}\,, \qquad (\operatorname{Log} i)^i\,, \qquad i^{(i^i)}.$$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen alle Punkte, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind. Bestimmen Sie ggf. die Ableitung f'.

a) $f(x+iy) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2 + i(4x^3y - 4xy^3 - 2xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $f(x+iy) := \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) $f(x+iy) := x(x^2 - 2y^2) + iy(2x^2 - y^2)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

d) $f(x+iy) := \sin(x)\sin(y) - i\cos(x)\cos(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu b): $\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.