

Funktionentheorie I

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 14.5.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 16 (K) (5 Punkte)

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, y) := x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$$

der Realteil einer auf \mathbb{C} holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen f , die u als Realteil haben. Geben Sie dabei $f = f(z)$ in einer Form an, bei der $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, \bar{z} und $|z|$ nicht explizit auftauchen.

Aufgabe 17 (K) (5 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob es eine Möbiustransformation S gibt, für die gilt:

$$S(0) = -2, \quad S(2) = 0, \quad S(i) = \infty \quad \text{und} \quad S(\infty) = -i.$$

b) Gibt es eine Möbiustransformation T , die den folgenden Bedingungen genügt?

$$T(1) = i, \quad T(i) = 1, \quad T(0) = \infty \quad \text{und} \quad T(3i) = 0.$$

c) Bestimmen Sie, falls die Möbiustransformation existiert, jeweils ihre Umkehrabbildung sowie die Fixpunkte (also alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $S(z) = z$ bzw. $T(z) = z$).

Aufgabe 18

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Beweisen Sie: Jede der folgenden Aussagen impliziert, dass f konstant ist.

a) Die Funktion $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

b) Die Funktion $|f|$ ist konstant.

c) Es gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, und $z \mapsto \arg f(z)$ ist konstant (modulo 2π).

Aufgabe 19

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$$

im Punkt 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, aber dort nicht komplex differenzierbar ist. Warum widerspricht das nicht Theorem 2.16 der Vorlesung?

Aufgabe 20

Es seien S und T Möbiustransformationen, deren Fixpunkte übereinstimmen. Zeigen Sie, daß dann $S \circ T = T \circ S$ gilt.

Wichtige Hinweise:

Die Modul-Prüfung und studienbegleitende Prüfung zur Funktionentheorie findet als Klausur statt.

Klausurtermin: 11.08.2010, 9.00-11.00 Uhr.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Weitere Details, insbesondere zur Anmeldung, werden noch bekanntgegeben.