KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
14.5.2010

Funktionentheorie I

5. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 21.5.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 21 (K) (5 Punkte)

a) Sei $M \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : M \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.
Zeigen Sie, daß dann $f(M)$ zusammenhängend ist.

b) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation S, durch welche die Menge

$$G := \{\, z \in \mathbb{C} : \, |z-1| > 1\,,\ |z-3| < 3 \,\}$$

auf $\{\, w \in \mathbb{C} : \, 0 < \operatorname{Re} w < 1 \,\}$ abgebildet wird. Ist dieses S eindeutig bestimmt?

Aufgabe 22 (K) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz$ für die folgenden Funktionen f und Kurven α.

(i) $f(z) := \overline{z}z^2\,, \quad \alpha(t) = e^{i(\pi - t)}\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(ii) $f(z) := \overline{z}z^2\,, \quad \alpha$: geradlinige Verbindung von -1 nach i

(iii) $f(z) := |z|^2\,, \quad \alpha$: Rand von $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1) \,\}$
Dabei soll der Rand der Menge entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

b) Die Kurve α sei gegeben durch $\alpha(t) = e^{it}\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\alpha \cos z\,dz$ sowie die Bogenlänge $L(\alpha)$ von α.

c) Welche der folgenden Funktionen hat auf $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$f(z) := \operatorname{Re} z, \qquad g(z) := \cos z \cdot e^{i \sin z} \qquad \text{(jeweils für alle } z \in \mathbb{C})$$

d) Es sei $\emptyset \ne M \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$, d. h. es gibt eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ so, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N gibt mit: $\forall n \ge N\ \forall z \in M : \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.
Weiter sei α eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\operatorname{Bild}\alpha \subseteq M$.

— bitte wenden —

Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\int_\alpha f_n(z)\,dz\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 23

Die Möbiustransformation S sei gegeben durch $S(z) := \dfrac{i-z}{1+z}$.

a) Bestimmen Sie, worauf die Einheitskreislinie $\partial\mathbb{E}$ sowie die reelle Achse und die imaginäre Achse durch S abgebildet werden.

b) Geben Sie eine Möbiustransformation $T \neq S$ an, die $T(\partial\mathbb{E}) = S(\partial\mathbb{E})$ erfüllt.

Aufgabe 24

Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

a) Zeigen Sie $f(z) = \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right), \quad z \in \mathbb{E}$.

b) Bestimmen sie die Menge $f(\mathbb{E})$ und zeigen Sie, dass f injektiv ist.

c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$.

Aufgabe 25

a) Berechnen Sie den Wert der zwei reellen Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(t+\cos t)\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\sin(t+\cos t)\,dt,$$

indem Sie eine geeignet gewählte Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.

b) Es sei p ein Polynom und α_R sei die positiv orientierte (d. h. einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene) Kreislinie $|z| = R$, mit $R > 0$. Zeigen Sie:

$$\int_{\alpha_R} \overline{p(z)}\,dz = 2\pi i\,R^2\,\overline{p'(0)}.$$

c) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, f' stetig und α eine stetig differenzierbare, geschlossene Kurve in D. Beweisen Sie:

$\displaystyle\int_\alpha \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ ist eine rein imaginäre komplexe Zahl.