KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
21.5.2010

Funktionentheorie I

6. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 28.5.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 26 (K) (5 Punkte)

Es sei $R > 0$, und die Kurven α_1, α_2 und α_3 seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$\alpha_1(t) = t\,, \qquad \alpha_2(t) = R + it\,, \qquad \alpha_3(t) = t(1+i)\,, \qquad \text{jeweils mit } 0 \le t \le R.$$

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\alpha_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{\alpha_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\alpha_2} e^{-z^2}\,dz.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\int_{\alpha_2} e^{-z^2}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der so genannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei ohne Beweis die Gleichung $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Aufgabe 27 (K) (5 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ setzen wir $M_a := \mathbb{H} \setminus \overline{U_1(ia)}$.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist M_a ein Sterngebiet?
Bestimmen Sie für diese a alle möglichen Sternmittelpunkte.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist M_a ein Elementargebiet?

— bitte wenden —

Aufgabe 28

a) Zeigen Sie, dass der Abschluss einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend ist.
Gilt die entsprechende Aussage auch für bogenzusammenhängende Mengen?

b) Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, M beschränkt, heißt $\operatorname{diam}(M) := \sup\{\, |w - z| \,:\, w, z \in M \,\}$ der Durchmesser von M. Zeigen Sie:

(i) Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$, so ist $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

(ii) *(Cantorscher Durchschnittssatz)*
Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{diam}(K_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so enthält $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ genau einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 29

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete?

a) $\mathbb{R}$

b) $\{\, z \in \mathbb{C} : |e^z| > 1 \,\}$

c) $\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) < 1 \,\}$

d) $\{\, z \in \mathbb{C} : |z^2 - 3| < 1 \,\}$

e) $\{\, z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1,\ 0 < \operatorname{Im}(z) < 1 \,\} \setminus M$,
wobei $M := \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{n},\ 0 < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2} \,\}$.

Aufgabe 30

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $|a| < r < |b|$. Sei α die positiv orientierte Kreislinie $|z| = r$ mit $r > 0$. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z - a}\, dz,$

b) $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z - b}\, dz,$

c) $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{(z - a)(z - b)}\, dz.$