KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
28.5.2010

Funktionentheorie I

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 4.6.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 31 (K) (5 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_\alpha \frac{e^z}{z^2+3z}\,dz, \qquad \alpha(t) = e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]),$

b) $\displaystyle\int_\alpha \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z^2-5z+6}\,dz, \qquad \alpha(t) = 5e^{it} \quad (t \in [0, 8\pi]),$

c) $\displaystyle\int_\alpha \frac{e^{i\sin z}\cos(z^4+1)-z}{(z-9)^{42}}\,dz, \qquad \alpha(t) = 2+3e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]),$

d) $\displaystyle\int_\alpha \frac{e^{3z}}{(z+1)^{17}}\,dz \qquad \alpha(t) = 3e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]),$

e) $\displaystyle\int_\alpha \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^2}\,dz \qquad \alpha(t) = 3+e^{-2\pi it} \quad (t \in [-1/2, 1/2]).$

Aufgabe 32 (K) (5 Punkte)

a) Es sei f eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Beweisen Sie, daß es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gibt, für die $f(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ gilt.

b) Es sei f eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 33

Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert duch $\alpha(t) := e^{it}$. Weiter sei $h : \partial\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ stetig.

a) Zeigen Sie, daß die auf $\mathbb{E}$ durch $f(z) := \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{h(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$ definierte Abbildung holomorph ist.

b) Warum könnte man vermuten, daß $\lim\limits_{z\to a} f(z) = h(a)$ für jeden Punkt $a \in \partial\mathbb{E}$ gilt?

c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die Vermutung aus b) im allgemeinen nicht zutrifft.

— bitte wenden —

Aufgabe 34

(Schwarzsches Spiegelungsprinzip)
Sei $\emptyset \neq G$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, d. h. $z \in G \Longleftrightarrow \overline{z} \in G$.
Wir setzen

$$G_+ := \{\, z \in G : \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad G_- := \{\, z \in G : \operatorname{Im} z < 0 \,\} \text{ und}$$

$$G_0 := \{\, z \in G : \operatorname{Im} z = 0 \,\}.$$

Weiter sei $f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f_{|G_+}$ holomorph und $f(G_0) \subset \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, daß dann die durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } z \in G_- \end{cases}$$

definierte Fortsetzung von f auf G holomorph ist.

Aufgabe 35

a) Zeigen Sie, daß durch $\alpha(t) := R(t)e^{it}$, wobei $R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ eine stetige und stückweise differenzierbare Funktion mit $R(0) = R(2\pi)$ sei, eine geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben ist.
Zeigen Sie des weiteren, daß dann $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$ gilt.

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z}\, dz$ für die skizzierte geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve α.