KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 4.6.2010
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Funktionentheorie I

8. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 11.6.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 36 (K) (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden beiden Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-i}\right)z^n\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(i^n n + 2^n)\, z^{2n}.$$

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)n\, z^n$ konvergent ist. Berechnen Sie für diese z den Wert der Reihe.

c) Zeigen Sie, daß für jedes feste $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!}$ den Konvergenzradius ∞ hat.

d) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius:

$$f(z) := \frac{z^2+1}{z-i} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}), \qquad g(z) := \frac{z^2+2}{z-i} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}).$$

Aufgabe 37 (K) (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gibt eine auf $\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ holomorphe Funktion f mit

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Es gibt eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Es gibt eine auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$ mit $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Es gibt eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 38

Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Die ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Polynom mit Grad $\leq n$, wenn positive Konstanten a und b existieren mit $|f(z)| \leq a + b|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 39

Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $r \in [0, 1)$ gilt: $\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, r^{2n}$.

b) Für jedes $r \in [0, 1)$ gilt: $r^2 \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \, r^{2n}$.

c) Ist f auf $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ beschränkt, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergent.

Aufgabe 40

Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$.
$z \in \partial U_r(0)$ heißt *singulärer Randpunkt*, falls es keine offene Umgebung U von z in $\mathbb{C}$ gibt so, daß f eine holomorphe Fortsetzung auf $U_r(0) \cup U$ hat. Zeigen Sie:

a) Jede Potenzreihe hat mindestens einen singulären Randpunkt.

b) Jeder Randpunkt der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ist singulär.

Hinweis:
Am Freitag, den 18.6.2010, findet die Übung (statt um 14.00 Uhr)
um 11.30 Uhr im „Neuen Hörsaal (NH)“ (Architekturgebäude (20.40))
statt.