KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
11.6.2010

**Funktionentheorie I**

**9. Übungsblatt**
**Abgabe: bis Freitag, den 18.6.2010, 12.00 Uhr**

### Aufgabe 41 (K) (5 Punkte)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Weiter sei $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeigen Sie:

**a)** Es gilt $\partial(f(D)) \subset f(\partial D)$.

**b)** Die Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum in einem Randpunkt an.

**c)** Auf die Voraussetzung der Beschränktheit des Gebiets $D$ kann – selbst wenn $f$ als beschränkt vorausgesetzt wird – bei b) nicht verzichtet werden.

**d)** $f$ hat eine Nullstelle in $D$ oder die Funktion $|f|$ nimmt ihr Minimum in einem Randpunkt an.

**e)** Existiert eine Konstante $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \partial D$ und hat $f$ keine Nullstelle in $D$, so ist $f$ konstant. Auf die Voraussetzung der Nullstellenfreiheit kann dabei nicht verzichtet werden.

### Aufgabe 42 (K) (5 Punkte)

**a)** Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph. Zeigen Sie $|f'(z)| \leq \dfrac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $\varphi_a(z) := \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$ für $a \in \mathbb{E}$ und verwenden Sie das Schwarzsche Lemma.

**b)** Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, für die $f(i/4) = 1/2$ und $f'(i/4) = 5/6$ gilt?

### Aufgabe 43

Berechnen Sie jeweils $\max_{z \in \overline{\mathbb{E}}} |f|$ für

$$f(z) := e^{z^2 - z}, \quad f(z) := z^2 + z - 1, \quad f(z) := \cos z, \quad f(z) := 7 - z\overline{z}, \quad f(z) := \frac{z+1}{z - 2i}.$$

— bitte wenden —

**Aufgabe 44**

**a)** Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht konstant. Zeigen Sie, daß dann für jedes $c > 0$

$$\overline{\{ z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c \}} = \{ z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c \}$$

gilt. Wird statt Holomorphie nur Stetigkeit vorausgesetzt, so muß dies nicht gelten.

**b)** Sei $f : \overline{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ stetig und $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$. Beweisen Sie, daß $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{E}$ genau dann gilt, wenn $f$ die folgende Darstellung hat:

$$f(z) = e^{it} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \qquad (\text{mit } t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_k \in \mathbb{E}).$$

*Hinweis:* Betrachten sie zuerst den Fall, daß $f$ keine Nullstellen hat.

**Aufgabe 45**

**a)** Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $f$ injektiv auf einer Umgebung von $a \in D$. Zeigen Sie, daß dann $f'(a) \neq 0$ gilt.

**b)** Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(D)$ sei injektiv. Zeigen Sie, daß dann die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ holomorph ist und bestimmen Sie deren Ableitung.

**Wichtige Hinweise**:

- Die Modul-Prüfung und studienbegleitende Prüfung zur Funktionentheorie findet als Klausur statt.
  **Klausurtermin: 11.08.2010, 9.00-11.00 Uhr,**
  **Ort: Hörsaal AudiMax (Geb. 30.95).**
  Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

  Zur Teilnahme ist eine **Anmeldung bis zum 30.7.2010** erforderlich. Diese muß
  - im Falle der Modul-Prüfung (Bachelor-Studiengänge) online im KIT-Studierendenportal,
  - im Falle der studienbegleitenden Pfüfung durch Abgabe Ihres Prüfungsscheines im Sekretariat (Fr. Blach, Zimmer 3B-02 im Allianz-Gebäude)

  erfolgen.

  Bis zum 10.8.2010 ist eine Abmeldung auf entsprechendem Wege möglich (im KIT-Studierendenportal für die Modulprüfung; persönlich im Sekretariat für die studienbegleitende Prüfung). Außerdem können Sie sich *vor* Klausurbeginn im Hörsaal abmelden.
  Bei Nichtantritt ohne Abmeldung erhalten Sie die Note 5,0 (nicht ausreichend).

- Am Freitag, den 18.6.2010, findet die Übung (statt um 14.00 Uhr) **um 11.30 Uhr im „Neuen Hörsaal (NH)“ (Architekturgebäude (20.40))** statt.