KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
18.6.2010

Funktionentheorie I

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 25.6.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 46 (K) (5 Punkte)

Die folgenden Funktionen seien jeweils für alle $z \in \mathbb{C}$, für die der Ausdruck erklärt ist, definiert. Bestimmen Sie jeweils Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten.

a) $\dfrac{z^2 - z + iz - i}{(z+i)(z+2)^2(z-1)^3}$

b) $\dfrac{\sin(z^2)}{z(z+1)^3}$

c) $\dfrac{1}{\cos(1/z) - 1}$

d) $\cos\left(\dfrac{\sin z}{\sin(2z)}\right)$

e) $\dfrac{e^z}{z^3+z^2} - \dfrac{1}{z^2}$

Aufgabe 47 (K) (5 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Zeigen Sie:
Haben f und g in a jeweils eine n-fache Nullstelle, dann ist a eine hebbare Singularität von $\dfrac{f}{g}$ und es gilt $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \in D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$. Weiter gebe es $c, r > 0$ mit $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \leq \dfrac{c}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \dot{U}_r(0) \subset D$.
Zeigen Sie, daß 0 eine hebbare Singularität von $\dfrac{f(z)}{z}$ ist.

c) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$ holomorph. Zeigen Sie:
f hat in a eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) genau dann, wenn f^2 in a eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. wesentliche Singularität) hat.

Aufgabe 48

Bestimmen Sie die Laurententwicklung der Funktion $z \mapsto \dfrac{z^2-1}{z^2+5z+6}$ für folgende Ringgebiete um den Entwicklungspunkt 0:
$D_{2,0}, \qquad D_{3,2}, \qquad D_{\infty,3}.$

Aufgabe 49

Zeigen Sie, daß die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{(2^n)} - z^{-(2^n)}}$ für jedes $z \in D_{\infty,1}$ konvergiert und $f \in \mathcal{O}(D_{\infty,1})$ gilt. Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f um den Entwicklungspunkt 0 im Ringgebiet $D_{\infty,1}$.

Aufgabe 50

Sei $q \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, die $f(z) = q \cdot z \cdot f(q^2 z)$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ erfüllen, in Form ihrer Laurentreihe.

Wichtiger Hinweis (Wdh.):
Die Modul-Prüfung und studienbegleitende Prüfung zur Funktionentheorie findet als Klausur statt.
Klausurtermin: 11.08.2010, 9.00-11.00 Uhr,
Ort: Hörsaal AudiMax (Geb. 30.95).
Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Zur Teilnahme ist eine **Anmeldung bis zum 30.7.2010** erforderlich. Diese muß

- im Falle der Modul-Prüfung (Bachelor-Studiengänge) online im KIT-Studierendenportal,
- im Falle der studienbegleitenden Pfüfung durch Abgabe Ihres Prüfungsscheines im Sekretariat (Fr. Blach, Zimmer 3B-02 im Allianz-Gebäude)

erfolgen.

Bis zum 10.8.2010 ist eine Abmeldung auf entsprechendem Wege möglich (im KIT-Studierendenportal für die Modulprüfung; persönlich im Sekretariat für die studienbegleitende Prüfung). Außerdem können Sie sich *vor* Klausurbeginn im Hörsaal abmelden. Bei Nichtantritt ohne Abmeldung erhalten Sie die Note 5,0 (nicht ausreichend).