

Funktionentheorie I

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 2.7.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 51 (K) (6 Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$ und $\lambda \notin \mathbb{N}$.

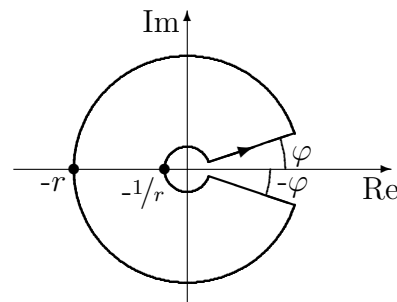
Weiter seien $P = P(x)$ und $Q = Q(x)$ Polynome mit $\text{Grad}Q > \lambda + \text{Grad}P$, $P(0) \neq 0$ und $Q(x) \neq 0$ für alle $x \geq 0$.

Schließlich setzen wir $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : -z \in \mathbb{C}_-\}$ und

$$f(z) := (-z)^{\lambda-1} \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ für jedes } z \in \mathbb{C}_+ \setminus N(Q).$$

Zeigen Sie, daß dann $\int_0^\infty x^{\lambda-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \text{Res}(f; a)$ gilt.

Hinweis: Sie können das Integral von f längs der skizzierten Kurve in Kombination mit den Grenzübergängen $\varphi \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ betrachten.



b) Berechnen Sie das folgende Integral: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$.

Aufgabe 52 (K) (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^\infty \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt$

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\pi t}}{t^2 + 2t + 2} dt$

c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{t \cos t}{t^2 - 2\pi t + a} dt$, wobei $a > \pi^2$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a + \cos t} dt$, wobei $a > 1$

Aufgabe 53

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von

a) $z \mapsto z^4 - 4z + 2$ in \mathbb{E} ,

b) $z \mapsto z^4 + iz^3 + 1$ im ersten Quadranten.

Wir laden ein zum traditionellen

S O M M E R F E S T

der Fakultät für Mathematik. Es findet diesmal am letzten Tag der Vorlesungszeit statt, also am

Freitag, dem 16. Juli 2010.

Wie üblich findet das Fest auf dem Gelände des Sportinstituts statt.

Alle Mitglieder der Fakultät für Mathematik sind herzlich dazu eingeladen, Gäste sind willkommen.

Den Auftakt bildet wieder ein Fußballspiel zwischen Dozenten und Studierenden auf dem Rasenplatz des Sportinstituts.

Anstoß des Fußballspiels: 18.00 Uhr.

Studierende, die am Fußballspiel teilnehmen möchten, sollten sich bei der Fachschaft Mathematik melden.

Nach dem Spiel können wir am Tennishaus grillen und feiern. Getränke und Brot werden wieder bereit gestellt, aber Grillgut (Würstchen, Steaks, ...) soll sich jeder **selbst mitbringen**.

Begleitet wird das abendliche Fest wieder von einem **musikalischen Programm** unter der bewährten Leitung von Prof. Henze.

Wir hoffen wieder auf rege Beteiligung, gutes Wetter und ein fröhliches Fest.

Aufgabe 54

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{\partial U_2(0)} \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz,$

b) $\int_{\partial U_1(0)} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz,$

c) $\int_{\alpha} \frac{e^z}{(z - 1)(z + 3)^2} dz, \quad \alpha(t) = 9e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]),$

d) $\int_{\alpha} \frac{z}{\cosh z - 1} dz,$

wobei α der positiv orientierte Rand von $\{x + iy : y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2)\}$ sei.

Aufgabe 55

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $c \in \mathbb{C}$ so, daß $f(z) - \frac{c}{z - a}$ auf einer geeigneten punktierten Umgebung von a eine Stammfunktion besitzt. Es gilt dann $\text{Res}(f; a) = c$.

b) Sei $r > 0$ und $f \in \mathcal{O}(\dot{U}_r(0))$. Zeigen Sie: $\text{Res}(f'; 0) = 0$.

Hinweis: