KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Sommersemester 2010
2.7.2010

Funktionentheorie I

12. Übungsblatt
Abgabe: bis Freitag, den 9.7.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 56 (K) (5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für jedes reelle $\lambda > 1$ hat die Gleichung $ze^{\lambda - z} = 1$ in $\mathbb{E}$ genau eine Lösung.

b) Wie viele Nullstellen hat $x^7 - 5x^5 + 3x^3 + 3ix$ in der Menge $(\mathbb{H} \cap D_{3,2}) \cup (2,3)$?

Aufgabe 57 (K) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie: (P.V.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{i\pi x}}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

b) Berechnen Sie: (P.V.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x+a}\,dx$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x+a}\,dx$ konvergent?

Aufgabe 58

An welcher Stelle scheitert die Argumentation im Beweis von Satz 7.35, wenn man beim Polynom Q auch Nullstellen höherer Ordnung auf der reellen Achse zuläßt?

Aufgabe 59

a) Seien $P = P(x)$ und $Q = Q(x)$ Polynome mit $\mathrm{Grad} Q \geq 2 + \mathrm{Grad} P$. Außerdem seien alle auf der reellen Achse liegenden Nullstellen von Q von erster Ordnung. Wir setzen $f := \dfrac{P}{Q}$ auf $\mathbb{C} \setminus N(Q)$.

Zeigen Sie: (P.V.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{a \in N(Q)\cap\mathbb{H}} \mathrm{Res}(f;a) + \pi i \sum_{a \in N(Q)\cap\mathbb{R}} \mathrm{Res}(f;a)$.

b) Formulieren Sie eine geeignete Voraussetzung so, daß sich mit der Formel aus a) auch (bestimmte) Pole höherer Ordnung behandeln lassen.

c) Berechnen Sie:

$$\text{(P.V.)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx, \quad \text{(P.V.)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^5(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Hinweis: $\dfrac{2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^5(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{-x+1}{2(x^2+1)}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 60

a) An welcher Stelle des Beweises von Theorem 8.7 („Satz von Montel“) geht die Voraussetzung ein, daß die Funktionenfolge beschränkt (und nicht nur punktweise beschränkt) ist? Formulieren Sie eine Verallgemeinerung des Satzes von Montel, indem Sie diese Voraussetzung geeignet abschwächen.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(\mathbb{E})$ mit $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f_n(re^{it})|\,dt \leq 17$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $r \in (0,1)$. Zeigen Sie, daß (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Hinweis der Fakultät:

F A K U L T Ä T F Ü R M A T H E M A T I K

Wir laden ein zum traditionellen

$\boxed{\text{S O M M E R F E S T}}$

der Fakultät für Mathematik. Es findet diesmal am letzten Tag der Vorlesungszeit statt, also am

Freitag, dem 16. Juli 2010.

Wie üblich findet das Fest auf dem Gelände des Sportinstituts statt.

Alle Mitglieder der Fakultät für Mathematik sind herzlich dazu eingeladen, Gäste sind willkommen.

Den Auftakt bildet wieder ein Fußballspiel zwischen Dozenten und Studierenden auf dem Rasenplatz des Sportinstituts.

Anstoß des Fußballspiels: 18.00 Uhr.

Studierende, die am Fußballspiel teilnehmen möchten, sollten sich bei der Fachschaft Mathematik melden.

Nach dem Spiel können wir am Tennishaus grillen und feiern. Getränke und Brot werden wieder bereit gestellt, aber Grillgut (Würstchen, Steaks, ...) soll sich jeder **selbst mitbringen**.

Begleitet wird das abendliche Fest wieder von einem **musikalischen Programm** unter der bewährten Leitung von Prof. Henze.

Wir hoffen wieder auf rege Beteiligung, gutes Wetter und ein fröhliches Fest.

Hinweis der Fachschaft: