KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 9.7.2010
Dr. Matthias Kurzke
Dipl.-Math. Thomas Gauss

Funktionentheorie I

13. Übungsblatt
Keine Abgabe!

Aufgabe 61

a) Sei $\emptyset \neq D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $a \in D$. Zeigen Sie, daß es genau eine konforme Abbildung $\varphi : D \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a) \in (0, \infty)$ gibt.

b) Sei $0 \in D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, das symmetrisch zum Ursprung liegt, d. h. $z \in D \iff -z \in D$. Zeigen Sie, daß jede konforme Abbildung $\varphi : D \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ ungerade ist, d. h. daß $\varphi(-z) = -\varphi(z)$ für alle $z \in D$ gilt.

Aufgabe 62

Zwischen welchen der folgenden Mengen gibt es konforme Abbildungen?

$$\mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad \mathbb{C}_-, \quad \mathbb{C}, \quad D_{\infty,1}, \quad \mathbb{E}, \quad U_1(0) \cup U_2(3i), \quad U_1(0) \cup U_2(2), \quad U_2(2i) \setminus \overline{U_1(i)}.$$

Aufgabe 63

a) Geben Sie ein Gebiet D, das 0 und $1 + i$ enthält, und zwei in D von 0 nach $1 + i$ verlaufende Kurven, die in D nicht homotop sind, an.

b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in D$. Zeigen Sie, daß das Gebiet $D \setminus \{a\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 64

a) Sei $r > 0$, $D \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{U_r(0)} \subset D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$. Weiter sei L die Länge von $f(\partial U_r(0))$ (damit ist natürlich die Bogenlänge der Kurve $f \circ \alpha_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha_r(t) := re^{it}$ gemeint). Zeigen Sie, daß dann $L \geq 2\pi r |f'(0)|$ gilt.

b) Sei $f : \overline{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv. Weiter gelte $f \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$. Wir fassen $f(\overline{\mathbb{E}})$ als Menge im $\mathbb{R}^2$ auf und bezeichnen mit A ihren Flächeninhalt. Zeigen Sie, daß dann $A \geq \pi |f'(0)|^2$ gilt.
Hinweis:
Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß für jede stetige Funktion $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gilt: $\left(\int_0^{2\pi} |h(t)|\, dt \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} |h(t)|^2\, dt$.

— bitte wenden —

Aufgabe 65

Welches sind die möglichen Werte des Kurvenintegrals $\displaystyle\int_\alpha \frac{\sin z}{\cos z}\,dz$, wenn α eine im Holomorphiegebiet des Integranden von $-i$ nach i verlaufende, stückweise differenzierbare Kurve ist?
Hinweis:
Sie dürfen zur Lösung ohne Beweis verwenden, daß die Umlaufzahl stets ganzzahlig ist.

Hinweise:

- Dies ist das letzte Funktionentheorie-Übungsblatt.
- Alle Informationen zur Klausur finden Sie auf der Internetseite zur Vorlesung. Bitte versäumen Sie nicht, sich rechtzeitig anzumelden!
- Auf der Vorlesungseite wird auch bekannt gegeben, wo und wann...
  - die Klausurergebnisse aushängen werden,
  - die Prüfungsscheine abgeholt werden können,
  - die Klausureinsicht stattfinden wird und
  - die Übungsscheine abgeholt werden können.

Viel Erfolg für die Klausur und alles Gute für Ihr weiteres Studium!