KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Matthias Kurzke
Dr. Thomas Gauss

11.08.2010

Studienbegleitende Prüfung / Modulprüfung / Diplomprüfung
Funktionentheorie I
SS 2010

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang:	☐ Diplom ☐ Bachelor ☐ Lehramt ☐ Math ☐ WiMa ☐ TeMa ☐ Info ☐ Phys ☐ ________

Wichtige Hinweise:

- Bitte füllen Sie den obigen Kasten auf diesem Deckblatt aus.
  Falls Sie zusätzliche Blätter verwenden, schreiben Sie auf jedes lose Blatt Ihren Namen.
- Diese Klausur enthält 7 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.
  Es können maximal 25 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 8 Punkte hinreichend.
- Zur Bearbeitung der Klausur stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung. Außer Schreibsachen sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Außer bei Aufgabe 5 („Multiple Choice“) müssen Sie jede Aussage beweisen. Bitte geben Sie dabei an, welche Sätze aus der Vorlesung Sie verwenden (z. B. „Aus dem Satz von Liouville folgt. . . “).
- Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.
  Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert! Streichen Sie ungültige Lösungswege.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
/4	/3	/5	/3	/4	/3	/3	/25

Note:

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \dfrac{5-5i}{1-2i} + e^{z-\overline{z}}$.
Geben Sie $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ als Funktionen von $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$ an.

b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, für die $\operatorname{Im} g(z) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ mit $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$, $z \in \mathbb{C}$ gilt.
(Es genügt, die Lösung(en) in der Form $g = g(x, y)$ anzugeben.)

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 3 (1+1+3 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial U_2(1)} \frac{1-\cosh z}{z^2}\,dz.$ *Hinweis:* $\cosh z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ für $z \in \mathbb{C}$.

b) $\displaystyle\int_{\partial U_1(\pi)} \frac{\sin z}{(z-\pi)^{36}}\,dz.$

c) $\displaystyle\int_{\partial U_8(0)} \frac{1+z^2}{e^z - 1}\,dz.$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Wert des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 3t + 5}{(t^2+1)^2}\, dt.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Entscheiden Sie (ohne Begründung) durch entsprechendes Ankreuzen, welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind.
(pro richtiger Antwort $+1/2$ Punkt, pro falscher Antwort $-1/2$ Punkt; Enthaltung möglich; Minimalgesamtpunktzahl 0)

	Aussage	richtig	falsch
a)	Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 0$. Dann ist f oder g konstant.		
b)	Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 1$. Dann ist f oder g konstant.		
c)	Die Möbiustransformationen $\frac{z-2}{3z-4}$ und $\frac{-4z+2}{-3z+1}$ sind zueinander invers.		
d)	Es gibt eine konforme Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $f(1/2) = i/4$.		
e)	Die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_1(n)$ ist ein Elementargebiet.		
f)	Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit Bild $f = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. *Hinweis:* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{\, x + iy : \ x, y \in \mathbb{Q} \,\}$.		
g)	Wenn $f : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist die Potenzreihenentwicklung um 1 von f nicht konvergent im Punkt i.		
h)	Es gibt eine auf $\mathbb{C}_-$ holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{e^n}) = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.		

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Sei $r > 0$. Weiter seien $f, g : \overline{U_r(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Außerdem seien f und g auf $U_r(0)$ holomorph und es gelte $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial U_r(0)$.
Zeigen Sie, daß es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt so, daß $f = \lambda g$ gilt.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 1$.
Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der rechten Halbebene $\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ genau eine Lösung hat.
Zeigen Sie außerdem, daß diese Lösung reell ist.