Funktionentheorie I

Vorlesungsmitschrieb der Vorlesung „Funktionentheorie“
von Dr. Kurzke
im Sommersemester 2010 an der Universität Karlsruhe.

geTEXed von
Judith Stumpp

19. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

`Hinweis:`
Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung Funktionentheorie im Sommersemester 2010 an der Universität Karlsruhe, gehalten von Dr. Kurzke. Der Mitschrieb erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Richtigkeit!

Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

Definition und Satz 1.1 *Auf der Menge* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *definieren wir folgende Verknüpfungen:*

$$\begin{aligned} + : (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ \cdot : (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ein Körper mit Null* $(0,0)$ *und Eins* $(1,0)$. *Wir nennen diese Struktur die komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Beweis: Nachrechnen der Körperaxiome

- $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe ✓ (Addition im Vektorraum $\mathbb{R}^2$)
- $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe:
  Assoziativität:
  $$\begin{aligned} &(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_3 b_2 + a_2 b_3) \\ &\quad = (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_3 b_1 b_2 - a_2 b_1 b_3, a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 - b_1 b_2 b_3) \\ &\quad = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (a_3, b_3) = ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2))(a_3, b_3). \end{aligned}$$
  Kommutativität: offensichtlich

  neutrales Element: $(1,0) \cdot (a,b) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b)$

  inverses Element: Sei $(a,b) \neq (0,0)$. Dann ist
  $$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \cdot (a,b) = \left(\frac{a^2-(-b)b}{a^2+b^2}, -\frac{a \cdot b - a \cdot b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$
- Distributivgesetz ist einfach.

■

Satz 1.2 *(Eigenschaften der komplexen Zahlen)*

(i) $\mathbb{R}$ *ist isomorph zu einem Teilkörper von* $\mathbb{C}$.

(ii) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ *hat genau zwei Lösungen in* $\mathbb{C}$. $i := (0, 1)$ *und* $-i := (0, -1)$

Beweis:

(i) $\mathbb{R} \ni a \mapsto (a, 0)$
$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2 - 0, 0 + 0) = (a_1 a_2, 0)$$
$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

(ii) $(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}}, \quad (0, -1)^2 = -1_{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow$ mindestens zwei; genau zwei, da Polynom von Grad 2.

■

Bemerkung 1.3 Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit dem zu $\mathbb{R}$ isomorphen Teilkörper von $\mathbb{C}$. Dann ist $\mathbb{C} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Insbesondere gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ eindeutig bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z = a + ib$. Wir nennen a den Realteil und b den Imaginärteil: $a = \text{Re } z, \ b = \text{Im } z$.

Satz 1.4 *Die Abbildung* $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $a + ib \mapsto a - ib$ *(komplexe Konjugation) ist ein Körperautomorphismus auf* $\mathbb{C}$. *Es ist* $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. *Des weiteren:* $\overline{\overline{z}} = z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ einfach.
$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$: Sei $z = a + ib, \ w = c + id$.
$\overline{zw} = ac - bd - i(bc + ad) = (a - ib) \cdot (c - id) = \overline{z} \cdot \overline{w}$
$z = \overline{z} \ \Leftrightarrow \ a + ib = a - ib \ \Leftrightarrow \ b = 0 \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{R}$ ■

Bemerkung 1.5 $\forall z \in \mathbb{C}$ ist $\text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ und $\text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

Definition 1.6 *Für* $z \in \mathbb{C}$ *setzen wir* $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ *den Betrag von* z.

Bemerkung 1.7 (Eigenschaften des Betrags)

(a) $z = x + iy \ \Rightarrow \ z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0$

(b) $|z|$ ist der Abstand von (x, y) zu $(0, 0)$ in der euklidischen Ebene.

(c) (i) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(ii) $|\text{Re } z| \leq |z|$, $|\text{Im } z| \leq |z|$

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(iv) $|z - w| \geq ||z| - |w||$

(d) Da $z\overline{z} = |z|^2$, folgt für $z \neq 0 :\ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
|1+2i| &= \sqrt{(1+2i)(1-2i)} = \sqrt{1-(-4)} = \sqrt{5} \\
(1+i)^{-1} &= \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2}(1-i) \\
\frac{1}{2}(1+i)(1-i) &= \frac{1}{2}(1-(-1)+i(1\cdot 1 - 1\cdot 1)) = \frac{1}{2}(2+0) = 1 \\
(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{-1} &= \frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Graphische Veranschaulichung der komplexen Zahlen: Gaußsche Zahlenebene
(Skizze)
(Skizze) Addition entspricht der Vektoraddition in der Ebene.
(Skizze) Komplexe Konjugation ist Spiegelung an der reellen Achse.
(Skizze)

Bemerkung 1.8 (Polarkoordinaten komplexer Zahlen)
Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gibt ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$. Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, also $x + iy = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.
Die Abbildung $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ (r, \varphi) \mapsto r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ ist surjektiv.
Wenn $r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ gilt, dann folgt $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Also bestimmt ein $z \in \mathbb{C}$ eindeutig $r = |z|$.
Das Argument φ ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches im 2π bestimmt.
φ heißt ein Argument von z, wenn $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Bemerkung 1.9 (Multiplikation in Polarkoordinaten)
Für $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),\ w = a(\cos\psi + i \cdot \sin\psi),\ r, a, \varphi, \psi \in \mathbb{R},\ r, a \geq 0$, ist $zw = ra(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$.
(Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man Beträge multipliziert und Argumente addiert.)

Beweis:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) &= (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) \\
&\quad + i(\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi) \\
&= \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)
\end{aligned}$$

(Skizze) ■

Definition 1.10 *(Hauptwert des Arguments)*
Wir definieren $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ *durch*

$$\mathrm{Arg}\ z = (\textit{das eindeutige } \varphi \in (-\pi, \pi] \textit{ mit } z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))$$

Beispiele:

$$\mathrm{Arg}\ 1 = 0 \quad , \quad \mathrm{Arg}\ (i) = \frac{\pi}{2},$$
$$\mathrm{Arg}\ (-1) = \pi \quad , \quad \mathrm{Arg}\ (-1 - \frac{1}{1000}i) \approx -\pi.$$

Warnung: Andere Definitionen sind möglich. Beispielsweise mit Bild $[0, 2\pi)$.
$\mathrm{Arg}\ (zw) - (\mathrm{Arg}\ z + \mathrm{Arg}\ w) \in 2\pi\mathbb{Z}$

$$\underbrace{2 \cdot \mathrm{Arg}\ (-1+i) = 2 \cdot \frac{3}{4}\pi, \quad \mathrm{Arg}\ ((-1+i)^2) = \mathrm{Arg}\ (-2i) = -\frac{\pi}{2}}_{\text{Differenz}\in 2\pi\mathbb{Z}}$$

Satz 1.11 *(n-te Einheitswurzel)*
Sei $n \in \mathbb{N}$. *Es gibt genau* n *Lösungen der Gleichung* $z^n - 1 = 0$ *und zwar* $\zeta_j = \cos(\frac{2\pi j}{n}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi j}{n})$ $(j = 0, \ldots, n-1)$.

(Skizze)

Beweis: Die ζ_j sind alle verschieden, da die Argumente in $[0, 2\pi)$ liegen.
Moivresche Formel: $(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$
$\Rightarrow \zeta_j^n = \cos(\frac{2\pi j}{n} \cdot n) + i\sin(\frac{2\pi j}{n} \cdot n) = 1 + i \cdot 0 = 1$
Die n-ten Einheitswurzeln liegen auf den Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen gleichseitigen n-Ecks.
$n = 4:\ 1, i, -1, -i$ (Skizze)
$n = 3:\ 1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (Skizze) ■
Analog: n-te Wurzel aus komplexen Zahlen.
Wenn $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ r > 0$, so ist $w = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n})\right)$ eine Lösung von $w = z^n$. Andere Lösungen: $\zeta_j w, j = 1, \ldots, n-1$.

1 Topologie der komplexen Zahlen

Definition 1.12 *(i) Für* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und* $\epsilon > 0$ *setzen wir* $U_\epsilon(z_0) := B_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$ *die offene* ϵ*-Umgebung von* z_0 */ den offenen* ϵ*-Ball um* z_0.

(ii) *Eine Menge* $U \subset \mathbb{C}$ *heißt offen, wenn* $\forall z_0 \in U\, \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subset U$.

(iii) *Eine Menge* $M \subset \mathbb{C}$ *heißt abgeschlossen, wenn* $\mathbb{C} \setminus M$ *offen ist.*

Beispiele: $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist offen; $\mathbb{C}$, $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

Bemerkung 1.13 (i) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

(ii) Der Schnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

Beweis:

(i) $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, U_i offen. $z \in U \Rightarrow z \in U_i \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z) \subset U_i \subset U$.

(ii) $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Sei $z \in U \Rightarrow \exists \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n : U_{\epsilon_i}(z) \subset U_i$,

$\overline{\epsilon} := \min(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $U_{\overline{\epsilon}}(z) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\epsilon_i}(z) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = U$.

■

Beispiel: Endliche Mengen sind abgeschlossen.

Definition 1.14 *Wir setzen für* $M \subset \mathbb{C}$

- $\mathring{M} := \bigcup\limits_{\substack{U \subset M \\ U \text{ offen}}} U$ *das Innere von* M.
- $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ *der Abschluss von* M.
- $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$ *der Rand von* M.

Bemerkung 1.15 $\mathring{M}$ ist offen. M ist offen $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$.
$\overline{M}$ ist abgeschlossen. M ist abgeschlossen $\Leftrightarrow M = \overline{M}$.

Definition 1.16 *(i)* M *heißt dicht in* N*, wenn* $M \subset N$ *und* $\overline{M} \supset N$.

(ii) $M \subset N$ *heißt diskret in* N*, wenn* $\forall z \in N\, \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z) \setminus \{z\} \cap M = \emptyset$.
$\Leftrightarrow$ *keine Folge in* M *einen Häufungspunkt* n N *hat.*

(iii) N *heißt Umgebung von* M*, wenn* $M \subset \mathring{N}$.

Beispiele:

(a) $M = B_r(a) \setminus \{a\}: \quad M = \mathring{M},\ \overline{M} = \overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$
$\partial M = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} \cup \{a\}$.

(b) $M = B_1(0) \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}): \quad \overline{M} = \overline{B_1(0)} \Rightarrow M$ ist dicht in $B_1(0)$.

(c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

(d) $\mathbb{N}$ ist diskret in $\mathbb{R}$.

Definition 1.17 *Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, falls in jeder Umgebung um z fast alle Folgenglieder liegen, d.h., falls $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : [n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \epsilon]$.*

Bemerkung 1.18 (i) Cauchy-Kriterium: (z_n) ist konvergent genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : [n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon]$.

(ii) $z_n \to z \Leftrightarrow \text{Re } z_n \to \text{Re } z$ und $\text{Im } z_n \to \text{Im } z$.

(iii) Stetigkeit der Körperoperationen: Ist $z_n \to z,\ w_n \to w$, so $z_n + w_n \to z + w,\ z_n \cdot w_n \to z \cdot w,\ \overline{z}_n \to \overline{z},\ |z_n| \to |z|$ und falls $z_n, z \neq 0\ \frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$.

Beweis: Der Beweis basiert auf folgender Überlegung:
$|z_n| \leq |\text{Re } z_n| + |\text{Im } z_n| \leq 2|z_n| \quad \Rightarrow \quad [z_n \to 0 \Leftrightarrow \text{Re } z_n \to 0, \text{Im } z_n \to 0]$ ■

Definition 1.19 *(i) Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungswert (HW) der Folge (z_n), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|z_n - z| < \epsilon$.*

(ii) Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) der Menge M, wenn in jeder Umgebung von z unendlich viele Punkte von M liegen.

Bemerkung:

(i) z HW von $(z_n) \Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $z_{n_k} \to z$.

(ii) z HP von $M \Leftrightarrow$ Es existiert eine Folge $z_n \in M \setminus \{z\}$ mit $z_n \to z$.

2 Spezielle Funktionen als Limites. Kurze Erinnerung an Reihen

Bemerkung 1.20 (i) Manche Folgen werden als Reihen geschrieben.
$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ←Reihe

($\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet sowohl die Folge (s_n), als auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, falls (s_n) konvergiert.)

(ii) Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ($\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent)

(iii) Vergleichssatz: Ist $|a_k| \leq |b_k|$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergiert $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

(iv) Quotientenkriterium: Ist $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q < 1$, so konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Beweis: Sei $N > 0$ so groß, dass $|s_m - s_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$ für $m, n \geq N$ (Cauchykriterium für Betragsreihe $\Rightarrow$ Cauchykriterium für Reihe ohne Beträge).
Der Beweis des Vergleichssatzes geht genauso.
(iv) $|a_k| \leq Cq^k$ (per Induktion) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ (für $|q| < 1$).
Also folgt aus dem Vergleichskriterium die Konvergenz. ■

Definition und Satz 1.21
Die folgenden Reihen konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$:

(i) Exponentialreihe: $\exp z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(ii) Sinusreihe: $\sin z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(iii) Cosinusreihe: $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Beweis:

(i) Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \ \Rightarrow \leq q < 1 \text{ für } n \geq N_0$$

(ii),(iii) genauso. ■

Bemerkung 1.22 (Cauchyprodukt von Reihen)
Falls $z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$, das Cauchyprodukt, absolut und
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

Beweis: folgt aus dem Beweis in $\mathbb{R}$ für Real- und Imaginärteile. ■

Satz 1.23 *(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)*
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\overbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}}^{\text{binomische Formel}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{k!}z^k}_{a_k}\underbrace{\frac{1}{(n-k)!}w^{n-k}}_{b_{n-k}} \\
&\overset{\text{Bem.1.22}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n\right) \\
&= \exp(z)\cdot\exp(w)
\end{aligned}$$

■

Korollar 1.24 $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$$

$\exp$ *ist ein Gruppenhomomorphismus von* $(\mathbb{C}, +)$ *nach* $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$.

Bemerkung 1.25 (i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$.

(ii) $\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$.

(iii) $\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$.

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned}\exp(iz) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \cos z + i\sin z\end{aligned}$$

(ii) $\cos(-w) = \cos w \;\Rightarrow\; \exp(iz) + \exp(-iz) = \cos z + i\sin z + \cos(-z) + i\sin(-z) = 2\cos z$

(iii) $\sin(-w) = -\sin(w) \;\Rightarrow\; \exp(iz) - \exp(-iz) = \cos z + i\sin z - \cos(-z) \underbrace{-i\sin(-z)}_{=+i\sin z} = 2i\sin z$

$\blacksquare$

Definition 1.26 *Wir definieren* $e^z := \exp(z)$.

Korollar 1.27 *Für* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

(ii) $\operatorname{Re}(e^z) = e^x\cos y, \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^x\sin y$.

(iii) $|e^z| = e^x$.

(iv) $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Korollar 1.28 *(Additionstheorem für Sinus und Cosinus)*
Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ *ist*

(i) $\sin(z + w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$,

(ii) $\cos(z + w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sin(z+w) &= \frac{1}{2i}\left(\exp(iz+iw)-\exp(-iz-iw)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp(iz)\exp(iw)-\exp(-iz)\exp(-iw)\right)\\
\sin z\cos w + \ cos z \sin w &= \frac{1}{2i}\left(\exp(iz)-\exp(-iz)\right)\frac{1}{2}\left(\exp(iw)+\exp(-iw)\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\exp(iz)+\exp(-iz)\right)\frac{1}{2i}\left(\exp(iw)-\exp(-iw)\right)\\
&= \frac{1}{4i}(\exp(iz)\exp(iw)-\exp(-iz)\exp(iw)\\
&\quad +\exp(iz)\exp(-iw)-\exp(-iz)\exp(-iw)\\
&\quad +\exp(iz)\exp(iw)+\exp(-iz)\exp(iw)\\
&\quad -\exp(iz)\exp(-iw)-\exp(-iz)\exp(-iw))\\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp(iz)\exp(iw)-\exp(-iz)\exp(-iw)\right)\\
&= \sin(z+w).
\end{aligned}$$

■

Wie injektiv ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
Erinnerung: $f : G \to H$ Homomorphismus. Kern $f = f^{-1}(e_H) = \{g \in G : f(g) = e_H\}$

Satz 1.29 Kern (exp) $= 2\pi i\mathbb{Z}$

Beweis: Wann ist $\exp(z) = 1$?

„$\supset$“: Sei $k \in \mathbb{Z}$. $\exp(2\pi ik) = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{1} + i\underbrace{\sin(2\pi k)}_{0} = 1 + i0 = 1$

„$\subset$“: Sei $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\quad \exp(x + iy) = 1 \overset{\text{Kor 1.27}}{\Rightarrow} 1 = |e^{x+iy}| = e^x \Rightarrow x = 0$.
$1 = e^z = \cos y + i \sin y \Rightarrow \cos y = 1$ und $\sin y = 0 \Rightarrow y = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$

■

Korollar 1.30 *Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit Periode $2\pi i$.*

Beweis: $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp\underbrace{(2\pi i)}_{\in \text{Kern exp}} = \exp(z) \cdot 1 = \exp(z)$.

Falls $\exp(z + p) = \exp(z)\quad \forall z$, so $\exp(z)\exp(p) = \exp(z) \Rightarrow \exp(p) = 1$
$\Rightarrow p \in 2\pi i\mathbb{Z}$. ■

Korollar 1.31 *(Nullstelllen von Sinus und Cosinus)*
$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Insbesondere sind alle Nullstellen von Sinus und Cosinus reell.

Beweis: $\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz \in 2\pi i\mathbb{Z}$.
$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow e^{2iz}e^{i\pi} = 1 \Leftrightarrow 2iz + i\pi \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ■

Bemerkung 1.32 Abbildungseigenschaften der komplexen Exponentialfunktion
Skizze
Geradenstücke parallel zur imaginären Achse werden in Kreise um 0 abgebildet.
Skizze
Geradenstücke parallel zur reellen Achse werden in in 0 ausgehende Halbgeraden abgebildet.
4 Skizzen

Definition 1.33 *(Hauptzweig des Logarithmus)*
Wir setzen $S := \{z \in \mathbb{C} :\ -\pi < \mathrm{Im}\ z \leq \pi\}$.
Die Exponentialabbildung ist von $S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *bijektiv. Wir schreiben:*
$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S$ *für die Umkehrfunktion und nennen diese den Hauptzweig des Logarithmus.*

Bemerkung 1.34 (i) Für $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$ ist $\mathrm{Log}\, z = \log z (= \ln z)$ der gewöhnliche reelle Logarithmus.

(ii) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\mathrm{Log}\, z = \log |z| + i \,\mathrm{Arg}\,(z)$
(Arg = Hauptwert des Arguments)

Bemerkung 1.35 (Komplexe Potenzen)
In $\mathbb{R}$ ist für $a > 0,\ s \in \mathbb{R}\quad a^s := \exp(s \log a)$.
In $\mathbb{C}$: exp nicht injektiv. Unklar, ob $\exp(z \,\mathrm{Log}\, w)$ oder $\exp(z(\mathrm{Log}\, w + 2\pi ik)),\ k \in \mathbb{Z}$ die „richtige“ Wahl für w^z ist.
$z \in \mathbb{Z} :\quad \exp(z \cdot 2\pi ik) = 1$, d.h. $\exp(z \,\mathrm{Log}\, w) = \exp(z(\mathrm{Log}\, w + 2\pi ik)) = w^z$

Beispiel:

- $1^{\frac{1}{2}}$? $\exp(\frac{1}{2} \mathrm{Log}\, 1) = \exp 0 = 1$,
  $\exp(\frac{1}{2}(\mathrm{Log}\, 1 + 2\pi ik)) = \exp(\pi ik) = (-1)^k$
- i^i? $\exp(i \,\mathrm{Log}\, i) = \exp(i \cdot i\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$,
  $\exp(i(\mathrm{Log}\, i + 2\pi ik)) = \exp(i \cdot \frac{i\pi}{2} + i \cdot 2\pi ik) = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-2\pi k}$

Wir definieren $w^z := \exp(z \operatorname{Log} w)$ und sind uns bewusst, dass wir eine Wahl getroffen haben.

Warnung: Die üblichen Potenzgesetze gelten nicht.
Es gibt $z, w, a \in \mathbb{C}$ mit $(zw)^a \neq z^a w^a$.
$(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} = i \cdot i = -1$
$(-1)^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-1)) = \exp(\frac{1}{2}\pi i) = i$
$((-1) \cdot (-1))^{\frac{1}{2}} = 1$

Erinnerung: Stetige Funktionen, kompakte Mengen, Grenzwerte von Funktionen

Definition 1.36 *(i) Sei $D \subset \mathbb{R}^p$ oder $D \subset \mathbb{C}^p$ eine Menge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^q$ (oder $f : D \to \mathbb{C}^q$) heißt stetig in $a \in D$, falls gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ (z \in D, \, |z - a| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon$$

(Hier ist für $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_p) \in \mathbb{C}^p$, $\quad |\zeta| := \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |\zeta_j|^2}$)

(ii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^q(\mathbb{C}^q)$ heißt stetig auf D, falls sie stetig in allen $a \in D$ ist.

Satz 1.37 *Sei $D \subset \mathbb{C}^p(\mathbb{R}^p)$ und $f : D \to \mathbb{C}^q(\mathbb{R}^q)$, $a \in D$. Dann sind gleichwertig*

(i) f stetig in a.

(ii) Für jede Folge $(a_n) \subset D$ mit $a_n \to a$ gilt $f(a_n) \to f(a)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $a_n \to a$ und sei $\epsilon > 0$. Für $|z - a| < \delta = \delta(\epsilon)$ ist $|f(z) - f(a)| < \epsilon$.
Wähle N so groß, dass $|a_n - a| < \delta$ für $n > N$.
Dann ist $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$.

„$\Leftarrow$“ Angenommen, es gibt $\epsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ ein $z \in D$ existiert mit $|z - a| < \delta$, aber $|f(z) - f(a)| \geq \epsilon$. Wähle zu $\delta_n = \frac{1}{n}$ eine Folge $(a_n) \subset D$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{n}$, aber $|f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Dann ist $a_n \to a$, aber $f(a_n) \not\to f(a)$ da $0 \not\geq \epsilon$.

■

Satz 1.38 *Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig.*

Beweis: Seien f, g stetig in $a \in D$. Sei $a_n \to a$. Dann ist $(f+g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \to f(a) + g(a) = (f+g)(a)$. Genauso für das Produkt. ■

Satz 1.39 *Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ ist stetig.*

Beweis: $z_n \to z,\ z_n,\ z \neq 0 \overset{\text{Bem.1.18}}{\Rightarrow} \frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$. ■

Satz 1.40 *Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig, d.h. ist f stetig in $a \in D$, g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a. ($f : D \to \mathbb{C}^q$, $g : D' \to \mathbb{C}^r,\ f(D) \subset D'$)*

Beweis: Wie oben. ■

Beispiel 1.41 (i) Konstanten sind stetig.

(ii) Die Identität $z \mapsto z$ ist stetig („$\delta = \epsilon$“).
$|z - a| < \delta \Rightarrow |z - a| < \epsilon$ für $\delta = \epsilon$.

(iii) Alle Polynome $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C}$ sind stetig.

(iv) f stetig auf $D \subset \mathbb{C},\ f \neq 0$ (d.h. $f(z) \neq 0\ \ \forall z \in D$)$\Rightarrow \frac{1}{f}$ stetig auf D.

(v) Gebrochenrationale Funktionen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ P(z), Q(z)$ Polynome, sind stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{Q(z) = 0\}$.

(vi) $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf $D \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Re f und Im f stetig.

(vii) $f : D \to \mathbb{C}$ stetig $\mathbb{C} \Leftrightarrow \overline{f} : D \to \mathbb{C}$ stetig.

(viii) f stetig $\Rightarrow |f|$ stetig..

Beispiel 1.42 Der Hauptwert des Arguments (und des Logarithmus) ist unstetig für $a \in M = \{z \in \mathbb{C} :\ \text{Re } z < 0,\ \text{Im } z = 0\}$

Beweis: $a \in M \Rightarrow \text{Arg }(a) = \pi.\ \ z_n := a - \frac{i}{n} \to a,\ \ \text{Arg }(z_n) \to -\pi$ für $n \to \infty$, also ist Arg nicht stetig. $\text{Log}(z) = \log|z| + i\,\text{Arg } z$. ■

Korollar 1.43 *Es gibt stetige und bijektive Funktionen, deren Umkehrfunktion nicht stetig ist.*
(Bsp.: $f : (-\pi, \pi] \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ f(t) = e^{it}$.
Die Umkehrfunktion ist Arg $: S^1 \to (-\pi, \pi]$.)

Definition 1.44 *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^p$ (oder $\mathbb{C}^p$) heißt kompakt, falls sie die folgende (Heine-Borel)-Eigenschaft erfüllt:*
Ist $K \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ U_\lambda$ offen, Λ eine beliebige Indexmenge, so existieren

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ *(endlich viele) mit* $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$.
(„Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung“).

Bemerkung 1.45 Für Mengen $K \subset \mathbb{R}^p / K \subset \mathbb{C}^p$ gilt: K kompakt $\Leftrightarrow$ K abgeschlossen und beschränkt $\Leftrightarrow$ jede Folge (a_n) in K hat eine in K konvergente Teilfolge.

Beispiel 1.46 (a) $\mathbb{C}$ ist nicht kompakt

(i) nicht beschränkt

(ii) $\bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} U_2(a + bi)$ ist offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. $U_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \epsilon\}$

(b) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt.

(c) Cantormenge $C = \{\sum_{j=0}^{\infty} a_j 3^{-j} : a_j \in \{0, 2\}\}$ ist kompakt.

Satz 1.47 *Sei* $f : K \to \mathbb{R}^p(\mathbb{C}^p)$ *stetig,* K *kompakt. Dann is* $f(K)$ *kompakt.*

Beweis: Sei (z_n) eine Folge in $f(K)$. Wir wollen zeigen $z_{n_k} \to z_0$. $z_n = f(p_n)$, $p_n \in K$. Wähle konvergente Teilfolge $p_{n_k} \to p_0 \;\Rightarrow z_{n_k} = f(p_{n_k}) \to f(p_0) = z_0$. ■

Korollar 1.48 *Sei* $f : K \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion,* $K \neq \emptyset$ *kompakt. Dann nimmt* f *auf* K *Minimum und Maximum an, d.h. es gibt* $x_m \in K$, $x_M \in K$ *mit* $f(x_m) = \inf_{x \in K} f(x)$ *und* $f(x_M) = \sup_{x \in K} f(x)$.

Beweis. $f(K)$ kompakt. $\sup f(K) = b < \infty$, $\inf f(K) = a > -\infty$, $f(K)$ abgeschlossen $\Rightarrow a, b \in f(K)$.

Korollar 1.49 *Sei* K *kompakt,* $f : K \to \mathbb{C}$ *stetig. Wenn* $f(z) \neq 0 \;\forall z \in K$, *so existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $|f(z)| \geq \delta \;\forall z \in K$.

Beweis: $g = |f|$ erfüllt Voraussetzungen von Korollar 1.48. Es ist $g \geq 0$, $g \neq 0$. Wäre $\inf_K g = 0$, so existiert $z \in K$ mit $g(z) = 0$ ↯ Also $\inf_K g > 0$. ■

Definition 1.50 *(Grenzwert von Funktionen)*

Sei $f : D \to \mathbb{C}$. *Wir schreiben* $f(z) \to b$ *für* $z \to a$ $\left[\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) = b\right]$, *falls gilt:*

(i) a ist ein Häufungspunkt von D.

(ii) $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C} \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D \setminus \{a\} \\ b & z = a \end{cases}$ *ist stetig in a.*

Bemerkung 1.51 Sei $a \in D$ ein Häufungspunkt.
f stetig in $a \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) = f(a)$.

Bemerkung 1.52 Grenzwerte sind eindeutig. ($b, \tilde{b}$ Grenzwerte, $a_n \to a$, $|b - \tilde{b}| \leq |b - f(a_n)| + |f(a_n) - \tilde{b}| \to 0 \Rightarrow b = \tilde{b}$)

Kapitel 2

Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 2.1 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und a ein Häufungspunkt von D. $f : D \to \mathbb{C}$ heißt in a komplex differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existiert.*

Der Grenzwert heißt komplexe Ableitung und wird mit dem Symbol $f'(a)$ bezeichnet.

Beispiel 2.2 (i) $f(z) = z$ ist überall auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.
$a \in \mathbb{C},\ z \neq a,\ \ \frac{z-a}{z-a} = 1 \overset{z \to a}{\to} 1$, also $f'(a) = 1\ \forall a \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Funktion $f(z) = \text{Re } z$ ist nirgends komplex differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{C}$
$z_n = a + \frac{1+i}{n},\quad \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a} = \frac{\text{Re } a + \frac{1}{n} - \text{Re } a}{\frac{1+i}{n}} = \frac{1}{1+i}$
$w_n = a + \frac{1-i}{n},\quad \frac{f(w_n)-f(a)}{w_n-a} = \frac{\text{Re } a + \frac{1}{n} - \text{Re } a}{\frac{1-i}{n}} = \frac{1}{1-i} \Rightarrow \lim\limits_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existiert nicht.

Satz 2.3 *(äquivalente Charakterisierungen der komplexen Differenzierbarkeit)*
Sei $D \subset \mathbb{C},\ a \in D$ ein Häufungspunkt in $D,\ b \in \mathbb{C}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) f ist in a komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(a) = b$.

(b) Es gibt eine in a stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$ und $\varphi(a) = b$.

(c) Es gibt eine in a stetige Funktion $\rho : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(a) + b(z-a) + \rho(z)(z-a)$ und $\rho(a) = 0$.

(d) Die Funktion $r(z) = f(z) - f(a) - b(z-a)$ erfüllt $\lim\limits_{z \to a} \frac{r(z)}{z-a} = 0$

Beweis:

(a)⇒(b) Setze $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ b & z = a \end{cases}$

Da f differenzierbar in $a \Rightarrow \varphi$ stetig in a.

(b)⇒(c) $\rho(z) = \varphi(z) - b$.

(c)⇒(d) $r(z) = \begin{cases} \rho(z)(z-a) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$

$\frac{r(z)}{z-a} = \rho(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} 0$

(d)⇒(a) $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = b + \frac{r(z)}{z-a} \underset{z \to a}{\longrightarrow} b$.

■

Korollar 2.4 *f differenzierbar in $a \Rightarrow f$ stetig in a.*
(2.3(b))

Satz 2.5 *(i) Die in $a \in D$, a Häufungspunkt von D, komplex differenzierbare Funktionen bilden eine $\mathbb{C}$-Algebra, dh. für f, g in a komplex differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{C}$ sind $f+g$, $f \cdot g$ und λf in a komplex differenzierbar. Es gilt:*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(ii) Ist zusätzlich $f(a) \neq 0$, so ist $\frac{1}{f}$ in a komplex differenzierbar und $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{(f(z)+g(z))-(f(a)+g(a))}{z-a} &= \frac{f(z)-f(a)}{z-a}+\frac{g(z)-g(a)}{z-a} \to f'(a)+g'(a)\\
\frac{f(z)g(z)-f(a)g(a)}{z-a} &= \frac{f(z)g(z)-f(a)g(z)+f(a)g(z)-f(a)g(a)}{z-a}\\
&= \underbrace{g(z)}_{\overset{(2.4)}{\to} g(a)} \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{\to f'(a)} + f(a) \underbrace{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}}_{\to g'(a)}\\
&\to g(a)f'(a)+f(a)g'(a)\\
\frac{\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f(a)}}{z-a} &= \frac{\frac{f(a)-f(z)}{f(a)f(z)}}{z-a}\\
&= \underbrace{\frac{-1}{f(a)f(z)}}_{\to \frac{-1}{(f(a))^2}} \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{\to f'(a)} \to -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}
\end{aligned}$$

■

Korollar 2.6 *Polynome sind überall komplex differenzierbar.*
Ist $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, *so ist* $P'(z)=\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.

Beweis: (Per Induktion) $(z^n)'=nz^{n-1}, \quad n=0,1$✓
$n\to n+1: \; (z\cdot z^n)' = 1\cdot z^n + z\cdot nz^{n-1} = (1+n)z^n.$ ■

Bemerkung 2.7 Die Funktion $z\mapsto \overline{z}$ ist nirgendwo komplex differenzierbar (sonst wäre $\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2}$ differenzierbar).
Man kann zeigen: Ein Polynom $Q(z,\overline{z})$ in z und $\overline{z}$ ist genau dann überall differenzierbar, wenn es nicht von $\overline{z}$ abhängt.
Beispiel: $|z|^2=z\overline{z}$ ist außer am Nullpunkt nicht komplex differenzierbar.

Satz 2.8 *(Kettenregel)*
Seien $f:D\to\mathbb{C},\; g:D'\to\mathbb{C},\; f(D)\subset D'$. *Falls* $a\in D$ *ein Häufungspunkt von* D *ist,* $b=f(a)$ *einer von* D' *und* f *in* a *und* g *in* b *komplex differenzierbar ist, so folgt:* $(g\circ f)$ *ist in* a *komplex differenzierbar und* $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$

Beweis: Sei $f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a),\; \varphi$ in a stetig, $\varphi(a)=f'(a)$
$g(w)-g(b)=\psi(w)(w-b),\; \psi$ in b stetig, $\psi(b)=g'(b)$.
Für $z\neq a$ ist dann

$$\frac{g(f(z))-g(f(a))}{z-a}=\psi(f(z))\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\to g'(f(a))f'(a).$$

■

Bemerkung 2.9 Quotientenregel: „$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$"

Bemerkung 2.10 (i) (Potenzreihen) Ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} akz^k$ eine konvergente Potenzreihe, so darf innerhalb des Konvergenzradius gliedweise differenziert werden. $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k z^{k-1}$ (Beweis später)

(ii) exp ist differenzierbar mit $\exp' = \exp$ (Beweis morgen (Satz 2.18(iv))).

(iii) Log ist differenzierbar in $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}\ z \leq 0,\ \mathrm{Im}\ = 0\}$, $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$. (Beweis später (Beispiel 2.28))

(iv) $z \mapsto z^s = \exp(s \operatorname{Log} z)$ ist differenzierbar in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}\ z \leq 0,\ \mathrm{Im}\ = 0\}$, $(z^s)' = \exp(s \operatorname{Log} z)\frac{s}{z} = z^s \cdot \frac{s}{z} = sz^{s-1}$.

Definition 2.11 *(Reelle Differenzierbarkeit)*
Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^q$, $D \subset \mathbb{R}^p$ offen, heißt in $a \in D$ (total) differenzierbar, falls gilt:
Es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ so, dass

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x) \quad \textit{mit} \quad \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0.$$

Die Abbildung A ist eindeutig bestimmt und heißt Jacobi-Abbildung von f bei a. $A =: \mathrm{J}\,(f;a)$.

Bemerkung 2.12 Falls $f : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ total differenzierbar in $a = (a_1, a_2)$, dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(a_1,a_2) \\ f_2(a_1,a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - a_2 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x_1,x_2) \\ r_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} \\ \text{mit } \lim_{x \to a} \frac{r_i(x_1,x_2)}{|x-a|} &= 0 \end{aligned}$$

Falls $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a = a_1 + ia_2$

$$f(x_1 + ix_2) = f(a_1 + ia_2) + A \underbrace{\cdot}_{(*)} ((x_1 + ix_2) - (a_1 + ia_2)) + r(x_1 + ix_2)$$

$(*)$ = komplexe Multiplikation mit $A = f'(a)$
Wann sind diese Begriffe äquivalent?

Satz 2.13 *(Darstellbarkeit reell linearer Abbildungen durch komplexe Zahlen)*
Für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $A(z) = wz$.

(ii) A ist $\mathbb{C}$-linear, d.h. $A(\lambda z) = \lambda A(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$.

(iii) $A(i) = iA(1)$.

(iv) Die Matrix von A bezüglich der Standard-$\mathbb{R}$-Basis $\langle 1, i\rangle$ von $\mathbb{C}$ hat die Form $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i): klar.
(i)⇒(iv):
$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad w \in \mathbb{C},\ w = u + iv$
$w(x + iy) = (ux - vy) + i(uy + vx), \quad \begin{pmatrix} ux - vy \\ uy + vx \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(iv)⇒(iii):
$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) = \alpha + i\beta$
$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A(i) = -\beta + i\alpha = i(\alpha + i\beta) = iA(1)$ ■

Bemerkung 2.14 (Multiplikation mit $w = re^{i\varphi}$)
Matrizenmultiplikation mit w :
$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } \varphi}$$

(i) Drehstreckung

(ii) winkel- und orientierungstreu

Bemerkung 2.15 (Partielle Ableitung und Jacobimatrix)
Sei $f = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$, $\underline{D \text{ offen}}$, f total reell differenzierbar. In der Basis $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ hat die Jacobi-Abbildung die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_i(a)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a + h\binom{1}{0}) - f(a)}{h}$$

Andere Schreibweisen: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_{,x}$

Theorem 2.16 *(Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen)*
Sei $f : D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$. Es sind äquivalent:

(i) f ist in a komplex differenzierbar.

(ii) f ist in a als Abbildung von $D \to \mathbb{R}^2$ total reell differenzierbar und $u = \mathrm{Re}\ f$ und $v = \mathrm{Im}\ f$ erfüllen in a die folgenden Gleichungen:

$$(CRD)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a) \end{cases}$$

Es gilt $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$

Beweis: $a = a_1 + ia_2$

„$\Rightarrow$" $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + r(z), \quad \lim \frac{r(z)}{z-a} = 0$. Also ist

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a_1,a_2) \\ v(a_1,a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f'(a) & -\mathrm{Im}\ f'(a) \\ \mathrm{Im}\ f'(a) & \mathrm{Re}\ f'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} + r(x,y)$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{r(x,y)}{|(x,y)-(a_1,a_2)|} = 0 \;\Rightarrow\; f$ reell differenzierbar,

$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f'(a) & -\mathrm{Im}\ f'(a) \\ \mathrm{Im}\ f'(a) & \mathrm{Re}\ f'(a) \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$CRD und Darstellung von $f'(a)$

„$\Leftarrow$" Satz 2.13 (iv): Falls J $(f;a)$ diese Gestalt hat, entspricht das der Multiplikation mit $f'(a)$.

■

Bemerkung 2.17 Falls f in a komplex differenzierbar, so erfüllt die zugehörige Jacobi–Abbildung:

$\det \mathrm{J}\ (f;a) = |f'(a)|^2$: $\quad \det \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ f'(a) & -\mathrm{Im}\ f'(a) \\ \mathrm{Im}\ f'(a) & \mathrm{Re}\ f'(a) \end{pmatrix} = (\mathrm{Re}\ f'(a))^2 + (\mathrm{Im}\ f'(a))^2$.

Beispiel 2.18 (i) $f(z) = z = x + iy. \quad u = \mathrm{Re}\ f = x,\ v = \mathrm{Im}\ f = y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow$ erfüllt überall CRD

(ii) $f(z) = z^2, \;\; u = \mathrm{Re}\,(x+iy)^2 = x^2 - y^2,\ v = \mathrm{Im}\,(x+iy)^2 = 2xy$

$u_x = 2x,\ u_y = -2y,\ v_y = 2x,\ v_x = 2y \;\Rightarrow$ CRD überall erfüllt

(iii) $f(z) = \overline{z} = x - iy, \;\; u = \mathrm{Re}\ f = x,\ v = \mathrm{Im}\ f = -y$

$u_x = 1 \neq v_y = -1$

$\Rightarrow$erfüllt nirgendwo CRD, ist also nirgends komplex differenzierbar.

(iv) $\exp z$ ist überall komplex differenzierbar ($z = x + iy$):

$\mathrm{Re}\,(\exp z) = e^x \cos y =: u(x,y),\ \mathrm{Im}\,(\exp z) = e^x \sin y =: v(x,y)$

$u_x(x,y) = e^x \cos y,\ u_y(x,y) = -e^x \sin y,\ v_x(x,y) = e^x \sin y,\ v_y(x,y) = e^x \cos y.$

(v) $f(z) = |z|^2 = z\overline{z},\ u = \text{Re } f = x^2 + y^2,\ v = \text{Im } f = 0$
$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Diese ist in der Form $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$
$\Rightarrow f$ ist im Nullpunkt differenzierbar, nirgendwo sonst.

Definition 2.19 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C},\ \emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen heißt holomorph auf D, falls f in jedem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar ist.*

Beispiel 2.20 (i) $f : D \to \mathbb{C},\ f(z) = e^z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

(ii) Es gibt keine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$, in der $f(z) = |z|^2$ holomorph ist.

Definition 2.21 *$f : M \to \mathbb{C},\ M \subset \mathbb{C}$ heißt lokal konstant, falls für jedes $a \in M$ eine Umgebung U um a in $\mathbb{C}$ existiert so, dass $f|_{M \cap U}$ konstant ist.*

Beispiel 2.22 (i) Ist M diskret in $\mathbb{C}$, so ist jede Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ lokal konstant. $(f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C})$

(ii) Ist f auf $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$ lokal konstant, so ist f konstant.

(iii) $M = [-2,-1] \cup [1,2],\ f(x) = \text{sgn } x \Rightarrow f$ lokal konstant.

Satz 2.23 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind gleichwertig:*

(i) f ist lokal konstant auf D.

(ii) f ist holomorph auf D und $f'(z) = 0\ \forall z \in D$.

Beweis:

(i)$\Rightarrow$(ii) $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = 0$ für z in einer Umgebung von a, auf der f konstant ist
$\Rightarrow f$ differenzierbar, $f' = 0$

(ii)$\Rightarrow$(i) $f' = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow D\nabla u = 0,\ \nabla v = 0$
$\overset{\text{Analysis II}}{\Rightarrow} u, v$ lokal konstant $\Rightarrow f$ lokal konstant.

■

Korollar 2.24 *Eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, die nur reelle (imaginäre) Werte annimmt, ist lokal konstant.*

Beweis: $u_x = v_y = 0,\ u_y = -v_x = 0 \ \Rightarrow f' = 0$ ■

Definition 2.25 *(Zusammenhängende Mengen)*
Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, falls jede lokal konstante Funktion auf M konstant ist.

Korollar 2.26 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Der Realteil einer holomorphen Funktion f auf D bestimmt den Imaginärteil eindeutig bis auf eine additive Konstante.*

Beweis: $f_1 = u + iv_1,\ f_2 = u + iv_2$ holomorph $\Rightarrow f_2 - f_1 = i(v_2 - v_1)$ holomorph $\overset{\text{Kor.2.24}}{\Rightarrow} v_1 - v_2 = k = const.$ ■

Satz 2.27 *(Lokale Umkehrbarkeit und Ableitung der Umkehrfunktion)*
Sei $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ offen, f' stetig auf D.

(i) Ist $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$, so existiert eine offene Menge $D_0 \subset D$, $a \in D_0$ so, dass $f|_{D_0}$ injektiv ist.

(ii) Ist f injektiv auf D und $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$, so ist $f(D)$ offen und $f^{-1}: f(D) \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Beweis:

(i) Folgt aus dem Satz für die Umkehrfunktion in $\mathbb{R}^2$. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathrm{J}\,(f;a)$ invertierbar ist.
$\det \mathrm{J}\,(f;a) = |f'(a)|^2 > 0. \Rightarrow \mathrm{J}\,(f;a)$ invertierbar
$\overset{\text{Analysis II}}{\Rightarrow} f$ lokal invertierbar.

(ii) Reelle Analysis $\Rightarrow f^{-1}$ differenzierbar bei $f(a)$ mit Ableitung
$\mathrm{J}\,(f^{-1}; f(a)) = (\mathrm{J}\,(f;a))^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$
CRD $\Rightarrow f^{-1}$ ist komplex differenzierbar.
Kettenregel: $z = f^{-1}(f(z)),\ 1 = z' = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$.

Beispiel 2.28 $\exp: \underbrace{\{z \in \mathbb{C}: -\pi < \mathrm{Im}\ z \leq \pi\}}_{\text{nicht offen}} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv.

Etwas kleinere offene Menge $D = \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \mathrm{Im}\ z < \pi\}$
$\exp: D \to \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$ ist bijektiv.
$\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$. Umkehrfunktion: $\mathrm{Log}: \mathbb{C}_- \to D$
$\mathrm{Log}'(\underbrace{\exp z}_{=w}) \exp' z = 1,\ \mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{w}$

Welche reellen Funktionen sind Realteile holomorpher Funktionen?

Definition 2.29 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $u \in C^2(D)$ heißt harmonisch, falls* $0 = \Delta u := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

Satz 2.30 *Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^2(D;\mathbb{C})$ ($f : D \to \mathbb{C}$ zweimal reell stetig differenzierbar) und erfüllt f die CRD, so sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch.*

Beweis: $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$
$u_{xx} + u_{yy} \underset{CRD}{=} v_{yx} + (-v_{xy}) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + u_{xy} = 0$ ■

Beispiel 2.31 (i) $f(z) = z^2 : \quad z = x + iy$
$\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2,\ \Delta(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$
$\operatorname{Im} z^2 = 2xy,\ \Delta(2xy) = 0 + 0 = 0.$

(ii) $f(z) = e^z : \quad \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y,\ \Delta(e^x \cos y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$

Satz 2.32 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein achsenparalleles Rechteck und sei $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann existiert eine Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ mit $u + iv$ holomorph in D.*

Beweis: Wir suchen v mit $\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$. Setze

$$\begin{aligned}
v(x,y) &:= \int_{x_0}^{x} (-v_y(s, y_0))\, ds + \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\, dt \\
v_y(x,y) &= 0 + u_x(x,y) \\
v_x(x,y) &= -u_y(x,y_0) - \int_{y_0}^{y} \underbrace{u_{xx}(x,t)}_{=u_{yy}(x,t)}\, dt \\
&= -u_y(x,y_0) - (u_y(x,y) - u_y(x,y_0)) = -u_y(x,y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (u,v)$ erfüllen CRD. Existenz ✓
Eindeutigkeit nach Korollar 2.26 ■

Bemerkung 2.33 (a) Jeder andere Weg wäre auch ok gewesen.

(b) Nicht wahr für $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Löcher machen Probleme)
$u(x,y) = \log|x + iy| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$
u ist harmonisch:
$\partial_x u = \frac{2x}{2(x^2+y^2)}, \quad \partial_{xx} u = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+yF} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\partial_y u = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_{yy} u = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \to \Delta u = 0$

Falls v existiert mit $u+iv$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$\Rightarrow u+iv$ holomorph in $\mathbb{C}_-$
$\overset{Eind.}{\Rightarrow} u+iv = \operatorname{Log} z + ik,\ k\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow v$ kann nicht stetig auf der negativen reellen Achse sein $\lightning$.

Definition 2.34 *(Wirtinger-Kalkül)*
Ist $f: D\to\mathbb{C}$ reell differenzierbar, so setzen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &:= f_z := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&\overset{f=u+iv}{=} \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y+iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x+v_y+i(v_x-u_y))\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &:= f_{\overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&\overset{f=u+iv}{=} \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(u_y+v_x))
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.35 (i) f holomorph in $D \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial\overline{z}} = 0$ in D.

(ii) $\frac{\partial\overline{z}}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}(1+i(-i)) = 1$

(iii) f holomorph $\Rightarrow f' = \frac{\partial f}{\partial z}$

„holomorphe Funktionen hängen nur von z , nicht von $\overline{z}$ ab“

Bemerkung 2.36 $f: D\to\mathbb{C}$ reell differenzierbar

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(z)-f(a) &= \frac{\partial f(a)}{\partial z}(z-a) + \frac{\partial f(a)}{\partial\overline{z}}(\overline{z}-\overline{a}) + r_1(z)(z-a) + r_2(z)(\overline{z}-\overline{a})\\
& r_i(a) = 0,\ r_i \textit{ stetig.}
\end{aligned}$$

Beweis der Bemerkung: $a = a_1 + ia_2$

$$\begin{aligned}
f(z)-f(a) &= \frac{\partial f(a)}{\partial x}(x-a_1) + \frac{\partial f(a)}{\partial y}(y-a_2) + \mathit{Rest}\\
\mathit{oBdA.}\ a = 0.&\\
\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z + \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\cdot\overline{z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x+iy)\\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x-iy)\\
&= \frac{1}{2}\Bigg(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + i\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) + x\frac{\partial f}{\partial x}\\
&\quad + y\frac{\partial f}{\partial y} + i\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg)\\
&= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

■

Satz 2.37 *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ zweimal stetig reell differenzierbar, so gilt:*

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 4 \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial z} f$$

Beweis: (für $u = \text{Re } f$) $u_z = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) \Rightarrow u_{z\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_{x\overline{z}} - iu_{y\overline{z}})$
$= \frac{1}{4}(u_{xx} + iu_{xy} - iu_{yx} + u_{yy}) = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy})$ ■

Kapitel 3

Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen, Möbiustransformationen

Definition 3.1 *Eine injektiv lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt orientierungstreu, wenn* $\det > 0$. *T heißt winkeltreu, wenn für alle $v, w \neq 0$ gilt:*

$$\frac{\langle Tv, Tw \rangle}{|Tv||Tw|} = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

Beispiel 3.2 (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$\det T = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow T$ nicht orientierungstreu.

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$

$\langle Tv, Tw \rangle = \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \langle v, w \rangle$

$|v| = |Tv| \Rightarrow T$ winkelerhaltend.

d.h. $z \mapsto \overline{z}$ ist winkel- aber nicht orientierungstreu.

(b) Drehstreckungen sind winkel- und orientierungstreu.

Satz 3.3 *Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist orientierungs- und winkeltreu $\Leftrightarrow T(z) = wz$ für ein $w \in \mathbb{C},\ w \neq 0$*

Beweis:

„$\Leftarrow$" Multiplizieren mit komplexer Zahl $re^{i\varphi}$, $r > 0$ ist Drehstreckung
$\Rightarrow$ winkel- und orientierungstreu.

„$\Rightarrow$" $a := T(1) \neq 0$ da T injektiv $\langle 1, i\rangle = 0$
$0 = \langle T(1), T(i)\rangle \overset{b:=\frac{T(i)}{a}}{=} \langle a, ab\rangle = \mathrm{Re}\,(\overline{a}ab) = |a|^2\,\mathrm{Re}\ b$
$\Rightarrow b = ir,\ r \in \mathbb{R}$.
$T(x+iy) = xT(1) + yT(i) = a(x+iry)$
zu zeigen: $r = 1$
Winkeltreue:

$$\begin{aligned}\langle T(x+iy), T(1)\rangle \cdot |x+iy| \cdot |1| \quad &= \quad \langle x+iy, 1\rangle \cdot |T(x+iy)| \cdot |T(1)| \\ &\Leftrightarrow \quad |a|^2 x|x+iy| = x|a(x+iry)|\,|a| \\ &\Rightarrow \quad \text{Für } x \neq 0 \text{ ist } |x+iy| = |x+iry| \\ &\Rightarrow \quad r = \pm 1\end{aligned}$$

$T(x+iy) = a(x \pm iy)$
Orientierungstreu $\Rightarrow$ „+"

■

Definition 3.4 *Eine differenzierbare Abbildung* $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, heißt lokal konform, falls die Jacobi-Abbildung* $\mathrm{J}(f; a)$ *in jedem Punkt winkel- und orientierungstreu ist.*

Satz 3.5 *Eine reell differenzierbare Abbildung* $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ *offen, ist lokal konform* $\Leftrightarrow$ f *holomorph,* $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$.

Beweis: Bemerkung oben und CRD. ■

Bemerkung 3.6 (Geometrische Deutung der lokalen Konformität)
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ lokal konform.
Sind $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to D \subset \mathbb{C}$ differenzierbare Wege, so gilt:
Falls γ_1 und γ_2 sich in einem Punkt p mit Schnittwinkel β schneiden, so schneiden sich die Bildwege $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ in $f(p)$ ebenso mit Winkel β.

Beweis: Sei oBdA. $\gamma_1(c) = \gamma_2(c) = p, \quad {\gamma_1}'(c) \neq 0 \neq {\gamma_2}'(c)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\langle {\gamma_1}'(c), {\gamma_2}'(c)\rangle}{|{\gamma_1}'(c)| \cdot |{\gamma_2}'(c)|} &= \cos\beta \\
(f \circ \gamma_1)'(c) &= \left((f' \circ \gamma_1) \cdot {\gamma_1}'\right)(c) \;=\; f'(p) \cdot {\gamma_1}'(c) \\
\langle (f \circ \gamma_1)'(c), (f \circ \gamma_2)'(c)\rangle &= \langle f'(p) \cdot {\gamma_1}'(c), f'(p) \cdot {\gamma_2}'(c)\rangle \\
&= |f'(p)|^2 \langle {\gamma_1}'(c), {\gamma_2}'(c)\rangle \\
\frac{\langle (f \circ \gamma_1)'(c), (f \circ \gamma_2)'(c)\rangle}{|(f \circ \gamma_1)'(c)| \cdot |(f \circ \gamma_2)'(c)|} &= \frac{|f'(p)|^2 \langle {\gamma_1}'(c), {\gamma_2}'(c)\rangle}{|f'(p)| \cdot |{\gamma_1}'(c)| \cdot |f'(p)| \cdot |{\gamma_2}'(c)}\\
&= \frac{\langle {\gamma_1}'(c), {\gamma_2}'(c)\rangle}{|{\gamma_1}'(c)| \cdot |{\gamma_2}'(c)|} \;=\; \cos\beta
\end{aligned}$$

■

Beispiel 3.7 (i) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = z^2, \quad f'(z) = 2z \neq 0$
$u = x^2 - y^2, \; v = 2xy$
$x = a \Rightarrow u = a^2 - y^2, \; v = 2ay \Rightarrow v^2 = 4a^2y^2 = 4a^2(a^2 - u) \Rightarrow$ Parabel
$y = b \Rightarrow u = x^2 - b^2, \; v = 2bx \Rightarrow v^2 = 4b^2x^2 = 4b^2(b^2 + u)$
Skizze

(ii) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \; f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2}) \neq 0$ für $z \neq \pm 1$
$\Rightarrow f$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0; 1; -1\}$ lokal konform.
$|z| = r \neq 1, \; \xi = \frac{x}{r}, \; \eta = \frac{y}{r}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1$
$\text{Re } f(z) = \frac{1}{2}(\xi r + \frac{\xi r}{r^2}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\xi$
$\text{Im } f(z) = \frac{1}{2}(\eta r - \frac{\eta r}{r^2}) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\eta$
$\Rightarrow \frac{u^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} = \xi^2 + \eta^2 = 1$
Skizze

Definition 3.8 *Sei* $A \in \mathrm{GL}\,(2, \mathbb{C}), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; ad - bc \neq 0.$
Zu A definieren wir die zugehörige gebrochen lineare Funktion

$$\mathfrak{h}_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \;\; \textit{für } z \neq -\frac{d}{c}, \quad (\textit{füralle } z, \; \textit{falls } c = 0).$$

Diese gebrochen lineare Abbildungen heißen Möbiustransformationen.

Satz 3.9 *Seien $A, B \in \mathrm{GL}\,(2, \mathbb{C})$. Dann ist für alle z, wo alles definiert ist,*

$$\mathfrak{h}_{AB}(z) = \mathfrak{h}_A(h_B(z))$$

Außerdem ist $\mathfrak{h}_{\mathrm{Id}}\,(z) = z$. Insbesondere sind Möbiustransformationen invertierbar.

Beweis:

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann } AB = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_A(\mathfrak{h}_B(z)) &= \frac{a_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{a_1a_2z + a_1b_2 + b_2c_2z + b_1d_2}{c - 1a_2z + c - 1b_2 + c_2d_1z + d_1d_2} \\
&= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + c_2d_1)z + c_1b_2 + d_1d_2} = \mathfrak{h}_{AB}(z). \\
\mathfrak{h}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(z) &= \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.10 $\frac{az+b}{cz+d}$ ist in $-\frac{d}{c}$ nicht definiert. Wir ersetzen $\mathbb{C}$ durch $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und setzen $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$\text{falls } c \neq 0: \ \mathfrak{h}_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq -\frac{d}{c}, \ \infty \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases}$$

$$\text{falls } c = 0: \ \mathfrak{h}_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & z \neq \infty \\ \infty & z = \infty \end{cases}.$$

Man kann eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ definieren (Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$), in der alle Möbiustransformationen bijektiv und stetig sind.

Satz 3.11 *Ist $\mathfrak{h}$ eine Möbiustransformation, $\mathfrak{h} \neq \mathrm{Id}$, so besitzt h genau einen oder zwei Fixpunkte, d.h. $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $\mathfrak{h}(z) = z$*

Beweis: Sei $\mathfrak{h}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (Klar: $\mathfrak{h}_{\alpha A} = \mathfrak{h}_A \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Fall 1: $c = 0$.
OBdA. $d = 1$.
$\mathfrak{h}(z) = az + b = z$?
$\mathfrak{h}(\infty) = \infty$.
$z = az + b, \Rightarrow z(1 - a) = b$ (1.Fixpunkt).
Falls $a \neq 0 :\Rightarrow z = \frac{b}{1-a}$ ist zweiter Fixpunkt.

Fall 2: $c \neq 0$.
OBdA. $c = 1$.
Löse: $\frac{az+b}{cz+d} = z$
$az + b = z^2 + dz$, also $z^2 + (d-a)z - b = 0$.
Quadratische Gleichung $\Rightarrow$ 1 oder 2 Lösungen.

$\blacksquare$

Korollar 3.12 *Möbiustransformationen sind durch Angabe dreier Punkte und ihrer Bildpunkte eindeutig festgelegt.*

Beweis: Seien z_1, z_2, z_3 verschiedene Punkte, $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ Möbiustransformationen mit $\mathfrak{h}_1(z_j) = \mathfrak{h}_2(z_j),\ j = 1,2,3$. Möbiustransformationen sind invertierbar.
$\Rightarrow (\mathfrak{h}_2^{-1} \circ \mathfrak{h}_1)(z_j) = z_j,\ j = 1,2,3 \Rightarrow \mathfrak{h}_2^{-1} \circ \mathfrak{h}_1$ ist Möbiustransformation mit 3 Fixpunkten
$\Rightarrow \mathfrak{h}_2^{-1} \circ \mathfrak{h}_1 = \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. $\blacksquare$

Bemerkung 3.13 (Spezielle Möbiustransformationen)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{h}(z) = z + b$, Translation, Fixpunkt ∞.

(b) $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \mathfrak{h}(z) = rz$, Streckung, Fixpunkte $0,\infty$.

(c) $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ $\quad \mathfrak{h}(z) = e^{i\varphi}z$ Drehung, Fixpunkte $0,\infty$.

(d) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Drehstreckung ((b) und (c) zusammen).

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathfrak{h}(z) = \frac{1}{z}$ Inversion, Fixpunkte ± 1.

Satz 3.14 *Jede Möbiustransformation lässt sich als Hintereinanderausführung von Translation, Multiplikation ($\hat{=}$Drehstreckung) und Inversion schreiben.*

Beweis: Betrachte $\frac{az+b}{cz+d}$

Fall 1: $c = 0$.
$\Rightarrow d \neq 0,\ a \neq 0.\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{a}{d}(z + \frac{b}{a})$
($\hat{=}$ Drehstreckung nach Translation)

Fall 2: $c \neq 0$.
OBdA.: $c = 1$.
$\frac{az+b}{z+d} = \frac{a(z+d)}{z+d} + \frac{b-ad}{z+d} = a + \frac{b-ad}{z+d}$,
d.h. $z \mapsto z + d \mapsto \frac{1}{z+d} \mapsto \frac{b-ad}{z+d} \mapsto a + \frac{b-ad}{z+d}$.

■

Definition 3.15 *Ein verallgemeinerter Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$ ist entweder ein Kreis in $\mathbb{C}$ oder eine Gerade in $\mathbb{C}$ und der Punkt ∞.*

Satz 3.16 *Möbiustransformationen bilden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.*

Beweis: Klar für Translation und Drehstreckungen. Wegen Satz 3.14 reicht es zu, die Aussage für $z \mapsto \frac{1}{z}$ zu zeigen.
Kreis: $\{z : \ |z-a| = r\}, \ r > 0, \ a \in \mathbb{C}$.

Fall 1: $a = 0$. $w = \frac{1}{z}$ erfüllt $|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \Rightarrow$ Kreis um 0.

Fall 2: $a \neq 0$. $|\frac{1}{w} - a| = r \Rightarrow |\frac{1}{a} - w| = r|\frac{w}{a}|$
$\Rightarrow \left|\frac{w-\frac{1}{a}}{w-0}\right| = \frac{r}{|a|} \overset{L3.17}{\Rightarrow}$ Kreis oder Gerade.

Gerade: $|z-p_1| = |z-p_2| \Rightarrow \frac{|\frac{1}{w}-p_1|}{|\frac{1}{w}-p_2|} = 1 \overset{p_1,p_2\neq 0}{\Rightarrow} \frac{|\frac{1}{p_1}-w|}{|\frac{1}{p_2}-w|} = \frac{|p_2|}{|p_1|} \overset{L3.17}{\Rightarrow}$ Kreis oder Gerade.
$p_1 = 0 : \ |\frac{1}{w}| = |\frac{1}{w} - p_2| \Rightarrow \frac{1}{|p_2|} = |\frac{1}{p_2} - w| \Rightarrow$ Kreis. ■

Lemma 3.17 *Seien $p, q \in \mathbb{C}, \ p \neq q, \ k > 0$. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ \frac{|z-p|}{|z-q|} = k\}$ ist eine Gerade, falls $k = 1$, andernfalls ein Kreis.*

Beweis: Falls $k = 1$: Gerade ✓.
Falls $k \neq 1$: Kreis: $|z-a|^2 = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} - r^2 = 0, \ a \in \mathbb{C}, \ r > 0$.
$k \neq 1$, oBdA. $k < 1$

$$\begin{aligned}
|z-p|^2 = k^2|z-q|^2 \quad &\Rightarrow \quad z\bar{z} - p\bar{z} - \bar{p}z + p\bar{p} = k^2(z\bar{z} - q\bar{z} - \bar{q}z + q\bar{q}). \\
&\Rightarrow \quad z\bar{z}(1-k^2) - (p - k^2q)\bar{z} - (\bar{p} - k^2\bar{q})z + p\bar{p} - k^2q\bar{q} = 0. \\
&\Rightarrow \quad z\bar{z} - \frac{p-k^2q}{1-k^2}\bar{z} - \overline{\left(\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right)}z + \frac{p\bar{p} - k^2q\bar{q}}{1-k^2} = 0.
\end{aligned}$$

Wollen: $\frac{p\bar{p}-k^2q\bar{q}}{1-k^2} \overset{!}{=} \left(\frac{p-k^2q}{1-k^2}\right)\left(\frac{\bar{p}-k^2\bar{q}}{1-k^2}\right) - R^2, \ R > 0$.
Da $(|p|^2 - k^2|q|^2)(1-k^2) < |p - k^2q|^2 \Rightarrow$ es gibt R mit dieser Eigenschaft.
■

Beispiel 3.18 Die Cayleyabbildung $z \mapsto \frac{z-i}{z+i} = \mathfrak{h}_C(z),\ C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ bildet die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ bijektiv und holomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$ ab. Die Umkehrfunktion ist $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Das Bild der reellen Achse ist der Rand des Einheitskreises ohne die 1 $(\partial\mathbb{E} \setminus \{1\})\ \ \mathfrak{h}_C(\infty) = 1$.
$i \mapsto 0,\quad 0 \mapsto -1,\quad 1 \mapsto \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$.
Skizzen

Beispiel 3.19 Die Abbildung $g :\ z \mapsto -z^2$ bildet $\mathbb{H}$ bijektiv und holomorph auf die geschlitze Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{z :\ z \in \mathbb{R},\ z \leq 0\}$ab.

Beweis: $g(\mathbb{H}) \subset \mathbb{C}_-$, denn: $-z^2 \leq 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \not\subset \mathbb{H}$.
Injektivität: $-z_1^2 = -z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2 \Rightarrow (z \in \mathbb{H} \Rightarrow -z \notin \mathbb{H})$. ■

Korollar 3.20 *Die Abbildung $z \mapsto \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ bildet den Einheitskreis $\mathbb{E}$ holomorph und bijektiv auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_-$ ab.*

Kapitel 4

Komplexe Integralrechnung

(„integrierbar“:=„Riemann-integrierbar“)

Definition 4.1 *Sei* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. f *heißt integrierbar, wenn* $\mathrm{Re}\ f$ *und* $\mathrm{Im}\ f$ *integrierbar sind, und wir setzen*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\mathrm{Re}\ f(x))\,dx + i\int_a^b (\mathrm{Im}\ f(x))\,dx.$$

Beispiel 4.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1 + i.$

Satz 4.3 *(Rechenregeln für komplexe Integrale)*
Setze $\mathfrak{C} := \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ f\ stetig\} = C^0([a,b];\mathbb{C})$

(i) Das Integral ist eine $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung* $\int_a^b \bullet\,d\alpha : \mathfrak{C} \to \mathbb{C}$

d.h. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \quad f, g \in \mathfrak{C}$

$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ f \in \mathfrak{C}.$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx, \quad \forall p \in [a,b]$

(iii) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Beweis: (i)-(ii) klar aus Definition und Eigenschaften reeller Integrale

(iii) Sei $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$ mit $\zeta \int\limits_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \zeta f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^b \mathrm{Re}\,(\zeta f(x))\,dx\right| \\
&\underset{\textit{Satz aus Ana I}}{\leq} \int_a^b \underbrace{|\mathrm{Re}\,(\zeta f(x))|}_{\leq |f(x)|}\,dx \\
&\leq \int_a^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

■

Satz 4.4 *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für Intervalle)*

(a) *Ist $f \in C^0([a,b];\mathbb{C})$, so ist die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar (reell/komplex) mit $F' = f$ (eine Stammfunktion von f).*

(b) *Ist $f \in C^0([a,b];\mathbb{C})$ und F eine Stammfunktion von f, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

(c) *Sind $F_1,\ F_2$ Stammfunktionen zu f, so ist $F_2 - F_1$ konstant.*

Beweis: Folgt aus dem Hauptsatz für reelle Integrale durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil. ■

Satz 4.5 *(Substitutionsregel)*
Seien I_1, I_2 Intervalle, $a, b \in I_1$, $\varphi : I_1 \to I_2$ stetig differenzierbar und $f \in C^0(I_2;\mathbb{C})$. Dann ist $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Beweis: $F' = f \Rightarrow (F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

■

Satz 4.6 *(Partielle Integration)*
Sind $u, v : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so ist

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Beweis: $(uv)' = u'v + uv'$ und Hauptsatz. ■

Definition 4.7 *Eine Kurve (oder ein Weg) ist eine stetige Abbildung $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C},\ a < b \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt stetig differenzierbar (C^1), wenn α stetig differenzierbar ist. Eine Kurve heißt stückweise C^1 (stückweise stetig differenzierbar), wenn es endlich viele Punkte $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ mit der Eigenschaft gibt, dass $\alpha_k := \alpha|_{[a_k, a_{k+1}]}$ stetig differenzerbar sind für $k = 0, \ldots, n-1$.*

Beispiel 4.8 (i) $\alpha_1 : [0, 1] \to \mathbb{C},\quad \alpha_1(t) := 0.$
$\alpha_2 : [0, 2] \to \mathbb{C},\quad \alpha_2(t) := 0.$

(ii) Seien $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$.
$\alpha_1 : [0, 1] \to \mathbb{C},\quad \alpha_1(t) := tz_2 + (1 - t)z_1.$
$\alpha_2 : [0, 1] \to \mathbb{C},\quad \alpha_2(t) := tz_1 + (1 - t)z_2 = \alpha_1(1 - t).$

(iii) Sei $p \in \mathbb{C},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
$\alpha_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\quad \alpha_k(t) := p + re^{ikt}.$

(iv) Polygonzüge sind stückweise C^1:
z.B. $\alpha : [1, 6] \to \mathbb{C},\quad \alpha(s) = (s-k)z_{k+1} + (k+1-s)z_k$ für $s \in [k, k+1]$
(Konsistenz z.B.: $\alpha(2) = (2 - 1)z_2 + 0 = z_2 = 0 + z_2 = z_2$.)

Bemerkung 4.9 Wir unterscheiden eine Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ und ihr Bild $\alpha([a, b])$.

Definition 4.10 *(Kurvenintegral)*

(a) Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Kurve und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $\alpha([a, b]) \subset D$. Dann definieren wir

$$\int_\alpha f := \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta := \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt.$$

(b) *Ist α nur stückweise C^1 mit Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, so setze*

$$\int_\alpha f := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha|_{[a_k, a_{k+1}]}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt.$$

(c) *Die Bogenlänge ist $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$ bzw. $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\alpha'(t)|\, dt$.*

Beispiel 4.11 (i) $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = tz_2 + (1-t)z_1$.
$L(\alpha) = \int_0^1 |z_2 - z_1|\, dt = |z_2 - z_1|$.

(ii) $\alpha=$ konstante Kurve aus 4.8(i). $L(\alpha) = 0$.
$\alpha' \equiv 0$. Für jedes f mit $\int_\alpha f = 0$.

(iii) $\alpha : [0,2] \to \mathbb{C}$, $\alpha(s) := e^{\pi is}$, $f(z) := \bar{z}$
$\int_\alpha f = \int_0^2 \overline{\alpha(s)}\alpha'(s)\, ds = \int_0^2 e^{-i\pi s} i\pi e^{i\pi s}\, ds = \int_0^2 i\pi\, ds = 2\pi i.$

Satz 4.12 *(Eigenschaften des Kurvenintegrals)*

(i) *Das Integral ist $\mathbb{C}$-linear,*
$\int_\alpha (f+g) = \int_\alpha f + \int_\alpha g.$
$\int_\alpha (\lambda f) = \lambda \int_\alpha f, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$

(ii) *Das Integral ist konsistent mit Integralen über Intervalle:*
Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = t$, so ist
$\int_\alpha f = \int_a^b f(t)\, dt.$

(iii) *Transformationsinvarianz: Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise C^1-Kurve, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.* Bild *$\alpha = \alpha([a,b]) \subset D$. Und ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Dann ist $\int_{\alpha\circ\varphi} f = \int_\alpha f$.*

(iv) *Standardabschätzung: Ist $\sup_{x \in \text{Bild } \alpha} |f(x)| \le M$, so ist $|\int_\alpha f| \le M \cdot L(\alpha)$.*

Beweis:

(i) $\int\limits_\alpha f+g = \int\limits_a^b (f+g)(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int\limits_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int\limits_a^b g(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt$
$= \int\limits_\alpha f + \int\limits_\alpha g.$

(ii) $\alpha' \equiv 1.\quad \int\limits_\alpha f = \int\limits_a^b f(t)\cdot 1\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,dt.$

(iii) $\int\limits_{\alpha\circ\varphi} f = \int\limits_c^d f(\alpha(\varphi(s)))\,\underbrace{(\alpha(\varphi(s)))'}_{\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)}\,ds \overset{Substitution}{=} \int\limits_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int\limits_\alpha f.$

(iv) $\left|\int\limits_\alpha f\right| = \left|\int\limits_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{|\bullet|\leq \sup\limits_{\text{Bild }\alpha}|f|}\alpha'(t)\,dt\right| \leq \int\limits_a^b \underbrace{\sup|f|}_{\leq M}\cdot|\alpha'(t)|\,dt \leq M\int\limits_a^b |\alpha'(t)|\,dt$
$= ML(\alpha).$

■

Definition 4.13 *Sei $D\subset\mathbb{C}$ offen, $f: D\to\mathbb{C}$ stetig. $F: D\to\mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, falls F holomorph und $F' = f$.*

Satz 4.14 *Ist $f: D\to\mathbb{C}$ stetig, $F: D\to\mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so gilt:*

(i) Für jede stückweise C^1-Kurve $\alpha: [a,b]\to D$ ist
$\int\limits_\alpha f = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$

(ii) Ist α geschlossen, (d.h. $\alpha(a)=\alpha(b)$), so ist $\int\limits_\alpha f = 0$.

Beweis:

(i) $\int\limits_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) = ?$
Berechne $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = F'(\alpha(t))\alpha'(t) = f(\alpha(t))\alpha'(t)$
(da F holomorph und Bem. 2.36)
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int(F\circ\alpha)'(t)\,dt = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$

(ii) klar.

■

Beispiel 4.15 (a) $f(z) = \bar{z}$ hat keine Stammfunktion in $\mathbb{C}$, da $\int\limits_\alpha \bar{z}\, dz = 2\pi i$ für α wie in Beispiel 4.11.

(b) $k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma(t) = re^{it}$

$$\int\limits_\gamma z^k\, dz = \int\limits_0^{2\pi} r^k e^{ikt} rie^{it}\, dt = r^{k+1} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\, dt$$

$$= \begin{cases} \frac{r^{k+1} i}{i(k+1)} e^{i(k+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 & k \neq -1 \\ i \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i & k = -1. \end{cases}$$

Bemerkung 4.16 (a) Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion.

(b) $\frac{1}{k+1} z^{k+1}$ ist für $k \neq -1, \ k \in \mathbb{Z}$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C}$ von $z \mapsto z^k$.

(c) Stammfunktionen sind auf zusammenhängenden Mengen (fast) eindeutig, (bis auf eine additive Konstante).

Definition 4.17 *(Operationen mit Wegen)*
Seien $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}, \ \beta : [b, c] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1, $\alpha(b) = \beta(b)$. Dann ist die Summe der Wege $\alpha \oplus \beta : [a, c] \to \mathbb{C}$

$$\alpha \oplus \beta(t) = \begin{cases} \alpha(t) & t \in [a, b] \\ \beta(t) & t \in (b, c] \end{cases}$$

und der reziproke Weg $\alpha^- : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad \alpha^-(t) = \alpha(b - t + a)$

Satz 4.18 *$D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. $\alpha : [a, b] \to D, \ \beta : [b, c] \to D$ stückweise C^1, $\alpha(b) = \beta(b)$. Dann ist*

(i) $\int\limits_{\alpha \oplus \beta} f = \int\limits_\alpha f + \int\limits_\beta f.$

(ii) $\int\limits_{\alpha^-} f = -\int\limits_\alpha f.$

Beweis:

(i) klar.

(ii) $$\int\limits_a^b f(\alpha^-(t)) \underbrace{(\alpha^-)'}_{\alpha'(b-t+a)\cdot(-1)} dt = \int\limits_a^b f(\alpha(b - t + a))\alpha'(b - t + a) \cdot (-1)\, dt$$

$$\overset{s=b-t+a}{=} \int\limits_b^a f(\alpha(s))\alpha'(s)\, ds = -\int\limits_a^b f(\alpha(s))\alpha'(s)\, ds.$$

■

Erinnerung: M heißt zusammenhängend, falls jede lokal konstante Funktion auf M konstant ist.

Definition 4.19 *Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend oder bogenzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $z, w \in M$ eine Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha([a, b]) \subset M$ und $\alpha(a) = z,\ \alpha(b) = w$ gibt.*

Beispiel 4.20 $M = \{x + iy :\ x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{x + iy :\ x = 0,\ |y| \le 1\}$ ist zusammenhängend, aber nicht bogenzusammenhängend.

Satz 4.21 *Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen. Dann sind gleichwertig:*

(i) M zusammenhängend,

(ii) M bogenweise zusammenhängend,

(iii) zu je zwei Punkten $z, w \in M$ existiert eine stückweise C^1-Kurve $\alpha : [a, b] \to M$ mit $\alpha(a) = z,\ \alpha(b) = w$.

Beweis:

(iii)⇒(ii) trivial.

(ii)⇒(i) Sei $f : M \to \mathbb{C},\ f$ lokal konstant, $z, w \in M$. Sei $\alpha\,[a, b] \to M$ stetig, $\alpha(a) = z,\ \alpha(b) = w$. Dann ist $f \circ \alpha :\ [a, b] \to \mathbb{C}$ lokal konstant. $[a, b]$ zusammenhängend $\Rightarrow\ f \circ \alpha$ konstant.
$\Rightarrow f(z) = f(w) \Rightarrow f$ konstant.

(i)⇒(iii) Sei $z_0 \in M$. Setzte $W := \{w \in M :$ es gibt eine stückweise C^1-Kurve, die z_0 und w verbindet$\}$. Setze $f :\ M \to \mathbb{C},\ f(z) = \begin{cases} 1 & z \in W \\ 0 & z \notin W \end{cases}$.
Zeige: f ist lokal konstant.
Sei $z \in M$. Wähle $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(z) \subset M$.

Fall 1: $z \in W \Rightarrow$ es gibt einen stückweise C^1-Weg α von z_0 nach z. Sei $z' \in U_\epsilon(z)$. Die Verbindungsstrecke β von z nach z' liegt in M.
$\Rightarrow \alpha \oplus \beta$ ist stückweise C^1-Verbindung von z_0 nach $z' \Rightarrow f(z') = 1 \Rightarrow f$ lokal konstant nahe Punkten in W.

Fall 2: $z \notin W$. $f(z) = 0$. Nimm an, es gibt (siehe oben) ein $z' \in U_\epsilon(z)$ mit $f(z') = 1$.
$\Rightarrow$ es gibt einen Weg nach z'. Wie im 1.Fall folgt: es gibt einen stückweise C^1-Weg nach z. $\Rightarrow f(z) = 1$ ↯

$\Rightarrow f \equiv 1,\ W = M \Rightarrow$ jeder Punkt kann stückweise C^1 mit jedem anderen verbunden werden.

■

Definition 4.22 *Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn M offen und zusammenhängend ist.*

Generalvoraussetzung 4.23 *Wenn wir über Kurven integrieren, sind diese stets als stückweise C^1 vorausgesetzt.*

Satz 4.24 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind gleichwertig:*

(i) f besitzt eine Stammfunktion.

(ii) Das Integral von f über jeden geschlossenen Weg ist Null.

(iii) Das Integral von f über eine Kurve hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

Beweis:

(i)⇒(ii) Satz 4.14

(ii)⇒(iii) Seien $\alpha_1 : [a_1, b_1] \to D,\ \alpha_2 : [a_2, b_2] \to D$ mit $\alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2),\ \alpha_1(b_1) = \alpha_2(b_2)$.
OBdA. ist $b_1 = a_2$. Dann ist $\alpha_1 \oplus \alpha_2^- : [a_1, b_2] \to D$ ein geschlossener Weg $\Rightarrow 0 = \int\limits_{\alpha_1 \oplus \alpha_2^-} f = \int\limits_{\alpha_1} f + \int\limits_{\alpha_2^-} f = \int\limits_{\alpha_1} f - \int\limits_{\alpha_2} f$

(iii)⇒(i) Sei $z_0 \in D$. Zu $z \in D$ sei α_z ein stückweise C^1-Weg von z_0 nach z. Setze $F(z) = \int\limits_{\alpha_z} f$. (Da unabhängig von Wahl von α_z, können wir schreiben $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$)
Zeige: F ist komplex differenzierbar mit $F' = f$.
Sei $r > 0$ mit $U_r(z) \subset D,\ w \in U_r(z)$. Es ist $F(w) = \int\limits_{z_0}^{w} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{z}^{w} f(\zeta)\, d\zeta$
d.h. $F(w) - F(z) = \int\limits_{z}^{w} f(\zeta)\, d\zeta$.
Wir nehmen einen Weg $\sigma : [0, 1] \to U_r(z),\ \sigma(t) = z + t(w - z),\ \sigma(0) =$

$z,\ \sigma(1) = w,\ \sigma'(t) = w - z$. Es ist $\int\limits_\sigma 1\, d\zeta = w - z$.
$\Rightarrow F(w) - F(z) - f(z)(w-z) = \int\limits_\sigma (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta$
$= \int\limits_0^1 [f(z + t(w-z)) - f(z)](w-z)\, dt$

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \underbrace{\int\limits_0^1 [f(z+t(z-w)) - f(z)]\, dt}_{zu\ zeigen: \to 0,\ f\ddot{u}r\ w\to z}$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$ für $|\xi - z| < \delta$.
Für $|w - z| < \delta \Rightarrow |z + t(w-z) - z| = t|w-z| < \delta$
$\Rightarrow \left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| < \int\limits_0^1 \epsilon\, dt = \epsilon$.
$\Rightarrow F$ ist differenzierbar, $F' = f$.

■

Definition 4.25 *(Dreiecke und Dreieckswege)*
Für ein Dreieck $\Delta := \Delta(z_1, z_2, z_3) := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 :\ t_1 + t_2 + t_3 = 1,\ t_1, t_2, t_2 \geq 0\}$ mit Rand $\partial\Delta := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 :\ t_k \geq 0,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1$, eines der $t_k = 0\}$ definieren wir den Dreiecksweg $\alpha_\Delta := \alpha_{z_1 z_2 z_3} :=$ (Strecke z_1 nach z_2) $\oplus$ (Strecke z_2 nach z_3) $\oplus$ (Strecke z_3 nach z_1).

z.B. $\alpha_\Delta : [0,3] \to \mathbb{C},\ \alpha_\Delta = \begin{cases} tz_2 + (1-t)z_1 & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)z_3 + (2-t)z_2 & 1 \leq t < 2 \\ (t-2)z_1 + (3-t)z_3 & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}.$

Wir setzen $\int\limits_{\partial\Delta} f := \int\limits_{\alpha_\Delta} f$ *(etwas unsauber).*

Satz 4.26 *(Lemma von Goursat)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$

$$\int\limits_{\partial\Delta} f = 0.$$

Beweis: Zerlege $\Delta = \Delta^0$ in kongruente Teildreiecke mit Ecken z_1, z_2, z_3, $\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_1+z_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}$. Es ist $\int\limits_{\partial\Delta^0} f = \int\limits_{\partial\Delta_1^1} f + \int\limits_{\partial\Delta_2^1} f + \int\limits_{\partial\Delta_3^1} f + \int\limits_{\partial\Delta_4^1} f$. (Satz 4.18)

Betrachte das Teildreieck $\Delta^1 = \Delta_k^1$, für das $\left|\int\limits_{\partial\Delta_k^1} f\right|$ am größten ist.

Dann ist $\left|\int\limits_{\partial\Delta^0} f\right| \leq 4 \left|\int\limits_{\partial\Delta^1} f\right|,\quad L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^0)$.

Definiere induktiv eine Folge von Dreiecken $\Delta^0 \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \ldots \supset \Delta^n$ mit
$\left|\int\limits_{\partial\Delta^0} f\right| \leq 4^n \left|\int\limits_{\partial\Delta^n} f\right|$ und $L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta^0)$
(Cantorscher Durchschnittssatz (vgl. Aufgabe 28b(ii))).
Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung ist $\bigcap\limits_{n\geq 0} \Delta^n = \{z_0\}$.
f ist in z_0 differenzierbar
$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \ \lim\limits_{z\to z_0} \frac{r(z)}{|z-z_0|} = 0, \ r$ stetig.
$z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ besitzt die Stammfunktion
$z \mapsto f(z_0)z + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2$
$\int\limits_{\partial\Delta^n} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\partial\Delta^n} r(\zeta)\, d\zeta$.
Sei $\epsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ mit $\frac{r(z)}{|z-z_0|} < \epsilon$ für $|z - z_0| < \delta$.
Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\Delta^n \subset U_\delta(z_0)$ für $n \geq N$.
$\Rightarrow \left|\int\limits_{\partial\Delta^n} r(\zeta)\, d\zeta\right| \leq \epsilon(L(\partial\Delta^n)) \cdot L(\partial\Delta^n)$
$\Rightarrow \left|\int\limits_{\partial\Delta^0} f\right| \leq 4^n\epsilon(L(\partial\Delta^n))^2 \leq 4^n\epsilon 4^{-n}(L(\partial\Delta^0))^2 = (L(\partial\Delta^0))^2\epsilon$
$\Rightarrow \int\limits_{\partial\Delta^0} f = 0$. ■

Definition 4.27 *Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $z_* \in M$ gibt mit der Eigenschaft:*
für alle $z \in M$, alle $t \in [0, 1]$ ist $tz + (1 - t)z_* \in M$.
Ist M offen und sternförmig, so heißt M ein Sterngebiet.

Bemerkung 4.28 Sterngebiete sind Gebiete
(wegzusammenhängend: zu $z, w \in M$ gibt es einen Weg $z \mapsto z_* \mapsto w$)

Beispiel 4.29 (a) $U_r(a)$ ist sternförmig für jede Wahl von $z_* \in U_r(a)$.

(b) Konvexe Mengen sind sternförmig.

(c) $\mathbb{C}_-$ ist sternförmig. (Wähle $z_* \in \mathbb{R}$ mit $z_* > 0$.)

(d) Sei $0 < r < R$. $U_R(a) \setminus \overline{U_r(a)}$ ist kein Sterngebiet.

(e) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Sterngebiet.

Theorem 4.30 *(Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in D:
$$\int_\gamma f = 0$$

Beweis: Nach Satz 4.24 reicht es zu zeigen, dass f eine Stammfunktion besitzt. Sei zu $z \in D$ α_z die Verbindungsstrecke von z_* nach z. Setze

$$F(z) = \int\limits_{\alpha_z} f =: \int\limits_{z_*}^{z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Da D offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(z) \subset D$. Sei $w \in U_\epsilon(z)$.

Nebenrechnung: (Goursat): $\int\limits_{\partial\Delta} f = 0 = \int\limits_{z_*}^{z} f(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{z}^{w} f(\zeta)\, d\zeta - \int\limits_{z_*}^{w} f(\zeta)\, d\zeta$

$$F(w) - F(z) = \int\limits_{z}^{w} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{0}^{1} f(z + t(w-z))(w-z)\, dt$$

Wie im Beweis von 4.24 (iii)$\to$(i):
F differenzierbar, $F' = f \Rightarrow \int\limits_{\gamma} f = 0.$ ■

Satz 4.31 *Theorem 4.30 gilt auch, wenn $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $f : D \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

Beweis: Müssen zeigen: $\int\limits_{\partial\Delta} f = 0$ für Dreieck $\Delta \subset D$ mit einer Ecke z_*.
Skizze

$$\int\limits_{\partial\Delta} f \;=\; \int\limits_{\partial\Delta_1} f + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta_2} f + \int\limits_{\partial\Delta_3} f + \int\limits_{\partial\Delta_4} f}_{=0 \text{ nach Goursat}}$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f\right| \;\le\; \int\limits_{\partial\Delta_1} |f| \;\le\; \max |f| \cdot L(\partial\Delta_1).$$

Wähle zu $\epsilon > 0$ ein Δ_1 mit $L(\partial\Delta_1) < \epsilon$
$\Rightarrow \left|\int\limits_{\partial\Delta} f\right| \le \underbrace{\max|f|}_{\le C} \cdot \epsilon \le C\epsilon$ (da f stetig)
$\Rightarrow \int\limits_{\partial\Delta} f = 0$
Rest des Beweises wie eben. ■

Definition 4.32 *Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt Elementargebiet, wenn jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat.*
(Beispiele: Sterngebiete; $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist kein Elementargebiet, da $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion besitzt)

Satz 4.33 *Sind D_1, D_2 Elementargebiete und ist $D_1 \cap D_2$ nichtleer und zusammenhängend, so ist $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.*

Beweis: Sei $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D_1 \cap D_2$. Sei $F_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f auf D_1, $F_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ eine auf D_2 mit $F_1(z_0) = F_2(z_0)$. Dann ist

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \textit{für } z \in D_1 \\ F_2(z) & \textit{für } z \in D_2 \setminus D_1 \end{cases}$$

eine Stammfunktion.
In $D_1 \cap D_2$ ist ${F'}_1 = f = {F'}_2 \Rightarrow {F'}_1 - {F'}_2 = 0 \Rightarrow F_1 - F_2$ lokal konstant.
$\underset{\textit{zusammenhängend}}{\overset{D_1 \cap D_2}{\Rightarrow}}$ $F_1 - F_2$ konstant $\Rightarrow F_1 = F_2$ auf $D_1 \cap D_2$.
$F' = f$ in $D_1 \cup D_2$. ■

Satz 4.34 *Ist $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Elementargebieten, so ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ ein Elementargebiet*

Beweis: offen: klar ✓
zusammenhängend: $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \Rightarrow a \in D_k$ für ein k, $b \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \Rightarrow b \in D_l$ für ein l
Daraus folgt: $a, b \in D_{\max(l,k)} \Rightarrow$ es gibt einen Weg, der a, b verbindet
$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ wegzusammenhängend.

Sei $f : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $p \in D_1$.
Sei $F_n : D_n \to \mathbb{C}$ mit ${F'}_n = f|_{D_n}$, $F_n(p) = 0$.
$\Rightarrow F_n = F_m$ auf $D_{\min(n,m)}$.
$F(z) := F_n(z)$, $z \in D_n$ (konsistent, da alle F_n gleich sind, wo definiert).
$z \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \Rightarrow z \in D_n \quad F'(z) = {F'}_n(z) = f(z)$. ■

Definition 4.35 *Ist $h : D \to D^*$, $D, D^* \subset \mathbb{C}$ offen, lokal konform (holomorph und h' nirgendwo 0) und h bijektiv, so heißt h eine konforme Abbildung.*
(Beispiel: Möbiustransformation, $\mathbb{E} \to \mathbb{C}_-$, $z \mapsto \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$)

Bemerkung 4.36 Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $h : D \to D^*$ konform, so ist D^* ein Elementargebiet.

Beweis: Nimm zusätzlich an: h' ist holomorph (beweisen wir später).
Sei $f^* : D^* \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei F eine Stammfunktion von

$(f^* \circ h) \cdot h' : D \to \mathbb{C}$
$F^* = F \circ h^{-1} : D^* \to \mathbb{C}$ holomorph,
$F^{*\prime} = (f^* \circ h \circ h^{-1}) \cdot (h' \circ h^{-1}) \cdot \frac{1}{h' \circ h^{-1}} = f^*$. ■

Bemerkung 4.37 (Riemannscher Abbildungssatz)
Ist $\emptyset \neq D \neq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, so gibt es eine konforme Abbildung $h : D \to \mathbb{E}$ (Einheitskreis).

Beweis: später. ■

Lemma 4.38 *Sei $a \in U_r(z_0)$.*
Dann ist $\int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ *(egal welcher Punkt a).*
Konvention: $\int\limits_{\partial U_r(z_0)} := \oint$ *in mathematisch positiver Richtung parametrisiert*

Beweis: 1.Schritt:
Behauptung: Für $U_\rho(a) \subset U_r(z_0)$ ist $\int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{\partial U_\rho(a)} \frac{dz}{z-a}$.
Benutze: $\frac{1}{z-a}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Sei γ_1 der Weg entlang $\partial U_r(z_0)$ und γ_2 der entlang $\partial U_\rho(a)$.
Dann ist $\int\limits_{\alpha_1} \frac{dz}{z-a} + \int\limits_{\alpha_2} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} - \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a}$
Skizzen
α_1 liegt in einer geschlitzten Ebene, auf der $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ holomorph ist.
$\overset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \int\limits_{\alpha_1} \frac{dz}{z-a} = 0$
α_2 liegt auch in einer geschlitzten Ebene, auf der $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ holomorph ist.
$\Rightarrow \int\limits_{\alpha_2} \frac{dz}{z-a} = 0$

$\Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}+a-a}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$ ■

Theorem 4.39 *(Cauchysche Integralformel)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $F : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{U_r(z_0)} \subset D$. Dann ist für jeden Punkt $z \in U_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Beweis: Es gibt $R > r$ mit $U_R(z_0) \subset D$. Betrachte auf $\tilde{D} = U_R(z_0)$ die Funktion $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$.

g ist auf $D \setminus \{z\}$ holomorph und auf D stetig.
$\overset{\text{Cauchyscher Integralsatz}}{\underset{4.31}{\Rightarrow}} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} g(w)\,dw = 0 \Rightarrow \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(z)}{w-z}\,dw =$
$2\pi i f(z)$. ■

Korollar 4.40 *Spezialfall $z = z_0$:*

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta \\ &\overset{(\zeta=z_0+re^{it})}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt \end{aligned}$$

(Funktionswert im Kreismittelpunkt = Mittelwert über Kreislinie)

Bemerkung 4.41 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$
Wobei $f(z)$ 1-mal differenzierbar und $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Satz 4.42 *(Differentiation parameterabhängiger Integrale)*
Sei $f : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ stetig, $D \subset \mathbb{C}$ offen. Für jedes $t \in [a,b]$ sei $f(t,\bullet)$ holomorph in D mit stetiger Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z} : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$. Dann ist $g(z) = \int\limits_a^b f(t,z)\,dt$ holomorph in D mit $g'(z) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt$.

Beweis: Reelle Analysis $\Rightarrow g$ total reell differenzierbar.
Setze $f = u + iv,\ g = \alpha + i\beta$.

$$\alpha_x(z) = \int\limits_a^b u_x(t,z)\,dt \overset{CRD}{=} \int\limits_a^b v_y(t,z)\,dt = \beta_y(z)$$

Genauso: $\alpha_y(z) = -\beta_x(z) \Rightarrow g$ erfüllt CRD.
$\Rightarrow g$ ist holomorph, $g' = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,\bullet)\,dt$. ■

Theorem 4.43 *(Cauchyformel für höhere Ableitungen)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar, und jede Ableitung ist holomorph. Ist $\overline{U_r(z_0)} \subset D$, so gilt für alle $z \in U_r(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

Beweis: Induktion nach n
$n = 0$ ✓ (Cauchyformel)
$\underline{n \to n+1:}$ Sei f n-mal komplex differenzierbar und sei $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta$
$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right) = (n+1)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}$ ist stetig für $\{\zeta \in \partial U_r(z_0),\ z \in U_r(z_0)\}$
$\overset{\text{Satz 4.42}}{\Rightarrow}$ $f^{(n)}(z)$ ist holomorph, und $f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{(n+1)f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}} \, d\zeta$. ■

Korollar 4.44 *Holomorphe Funktionen sind beliebig oft reell differenzierbar. Insbesondere gilt für harmonische Funktionen* $u : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2,\ u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u \in C^\infty(D)$.

Theorem 4.45 *(Satz von Morera)*
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ *stetig,* $D \subset \mathbb{C}$ *offen.*
Falls für jedes Dreieck $\Delta \subset D$ *gilt:* $\int\limits_{\partial\Delta} f(\zeta)\, d\zeta = 0$, *so ist* f *holomorph in* D.
(Das Lemma von Goursat charakterisiert also die holomorphen Funktionen).

Beweis: Wir zeigen: f hat lokal eine Stammfunktion.
Sei $z_0 \in D,\ \epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(z_0) \subset D$.
Für $z \in U_\epsilon(z_0)$ setze $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ (entlang der Verbindungsstrecke).
Nach Satz 4.24 (im Beweis wurden nur Dreiecke verwendet) ist F eine Stammfunktion von f in $U_\epsilon(z_0)$.
(Erinnerung: $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} = \int\limits_{w}^{z} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{z-w} \overset{z \to w}{\longrightarrow} f(w)$)
$\Rightarrow F$ holomorph in $U_\epsilon(z_0)$
$\Rightarrow f = F'$ holomorph in $U_\epsilon(z_0)$
$z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow f$ holomorph in D. ■

Definition 4.46 *Ist* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph, so heißt* f *eine ganze Funktion*
(Beispiele: $\exp(x)$, *Polynome, ...)*

Theorem 4.47 *(Satz von Liouville)*
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis: Sei f eine beschränkte ganze Funktion, z.B. $\sup\limits_{\zeta \in \mathbb{C}} |f(\zeta)| = M < \infty$.
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist für jeden Kreis $U_r(z)$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta$$

$$\Rightarrow |f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \Big| \int\limits_{\partial U_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} L(\partial U_r(z)) = \frac{M}{r}.$$

Da r beliebig $\Rightarrow f'(z) = 0$.
z beliebig $\Rightarrow f$ konstant. ■

Satz 4.48 *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Sei $P(z)$ ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten.
Dann hat P eine Nullstelle, d.h. es gibt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.

Beweis: Angenommen P hat keine Nullstelle. $\Rightarrow \frac{1}{P}$ ist ganze Funktion
Da P nicht konstant ist, gibt es $R > 0$ mit der Eigenschaft $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$.
$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,\ a_n \neq 0 \Rightarrow$ Für $|z| \to \infty$ ist $|P(z)| \to \infty$.
In $\{|z| \leq R\}$ ist $P(z) \neq 0 \Rightarrow |P| > 0$. Da $\{|z| \leq R\}$ kompakt ist und $|P|$ stetig
$\Rightarrow$ es gibt $c_0 > 0$ mit $|P| \geq c_0 > 0$ auf $\{z| \leq R\} \Rightarrow |P(z)| \geq \min(c_0, 1) > 0$ auf $\mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{\min(c_0,1)} < \infty$ auf $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \frac{1}{P}$ ist beschränkte, ganze Funktion $\Rightarrow \frac{1}{P} = const. \Rightarrow P = const.$ ↯ ■

Korollar 4.49 *Sei P in Polynom mit komplexen Koeffizienten.*
Dann gibt es $c \in \mathbb{C}$, $p_j \in \mathbb{C}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit $P(z) = c \prod\limits_{j=1}^{m} (z - p_j)^{k_j}$.

Beweis: Sei p_0 eine Nullstelle von $P \Rightarrow P(z) = (z - p_0) P_1(z)$. P_1 Polynom von niedrigerem Grad.
Induktion $\Rightarrow$ Behauptung. ■

Bemerkung 4.50 (Reelle und komplexe Wegintegrale)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ Kurve, $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Vektorfeld

$$\int\limits_\gamma W := \int\limits_a^b \langle W(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$\int\limits_\gamma W$ wegunabhängig $\Leftarrow W = \nabla U,\ U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Notwendig: $\partial_2 W_1 = \partial_1 W_2$ (auf Sterngebiet hinreichend)

<u>Komplex:</u> $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$ ($\cdot$ komplexe Multiplikation)

Setze

$$\begin{aligned} W^R &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ \omega \\ -\mathrm{Im}\ \omega \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \bar{\omega} \\ W^I &= \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ \omega \\ \mathrm{Re}\ \omega \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} i\bar{\omega} \\ \Rightarrow \int\limits_\gamma \omega &= \int\limits_\gamma W^R + i \int\limits_\gamma W^I \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Wegunabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \partial_1 W_2^R = \partial_2 W_1^R &\Rightarrow -v_x = u_y \\ \partial_1 W_2^I = \partial_2 W_1^I &\Rightarrow u_x = v_y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Cauchy-Riemann-Gleichungen sind Integrabilitätsbedingungen für Wegunabhängigkeit von $\int\limits_\gamma W^R$, $\int\limits_\gamma W^I$

Satz 4.51 *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit* $\exp(h(z)) = f(z)$.
„h ist ein analytischer Zweig des Logarithmus von f"
Weiter gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $\omega_n : D \to \mathbb{C}$ mit $(\omega_n(z))^n = f(z)$ „holomorphe n-te Wurzel".

Beweis: Idee: Ist $h = \log f$, so ist $h' = \frac{f'}{f}$.
f holomorph $\Rightarrow f'$ holomorph, $f \neq 0 \Rightarrow \frac{f'}{f}$ holomorph auf D.
Sei F eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$. Sei $p \in D$.
Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $\exp(F(p) + a) = f(p)$ $\left(\exp(a) = \frac{f(a)}{\exp(F(p))}\right)$.
Setze $h(z) = F(z) + a$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\exp(h(z))}{f(z)}\right)' &= \frac{\exp(h(z)) \cdot \frac{f'}{f} \cdot f - \exp(h(z)) \cdot f'}{(f(z))^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\exp(h(z))}{f(z)} &= const. = \frac{\exp(h(p))}{f(p)} = 1 \end{aligned}$$

$\omega_n(z) := \exp\left(\frac{1}{n}h(z)\right) \Rightarrow (\omega_n(z))^n = \exp\left(\frac{n}{n}h(z)\right) = f(z)$. ■

Kapitel 5

Folgen und Reihen holomorpher Funktionen

Definition 5.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}^p/\mathbb{C}^p$. Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt*

(i) punktweise konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $z \in D$ $f_n(z) \to f(z)$ gilt.

(ii) gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$, alle $z \in D$ gilt: $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

(iii) lokal gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls es zu jedem Punkt $a \in D$ eine Umgebung U von a in $\mathbb{R}^p/\mathbb{C}^p$ gibt, so dass $f_n|_{D\cap U}$ gleichmäßig gegen $f|_{D\cap U}$ konvergiert.

Bemerkung 5.2 gleichmäßig konvergent $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ lokal gleichmäßig konvergent $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ punktweise konvergent
$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ konvergiert lokal gleichmäßig, aber nicht gleichmäßig gegen $f = 0$.
$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ konvergiert punktweise, aber nicht lokal gleichmäßig gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$

Satz 5.3 *Sind $f_n : D \to \mathbb{C}$ stetig, f_n lokal gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, so ist f stetig.*

Beweis: Sei $a \in D$, dann ist

$$|f(z) - f(a)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Sei U eine Umgebung von a, so dass f_n auf $D \cap U$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ und n so groß, dass $|f - f_n| < \epsilon$ auf $D \cap U$.
Sei $\delta > 0$, so dass $|f_n(z) - f_n(a)| < \epsilon$ für $|z - a| < \delta$
$\Rightarrow$ Falls $z \in U$, $|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$. ■

Satz 5.4 *Ist $f_n \to f$ lokal gleichmäßig konvergent auf D, so ist für jede kompakte Menge $K \subset D$ $f_n|_K \to f|_K$ gleichmäßig konvergent.*

Beweis: Sei zu $a \in D$ U_a eine Umgebung von a mit $f_n|_{U_a \cap D} \to f$ gleichmäßig konvergent. Dann ist $K \subset \bigcup\limits_{a \in D} U_a$ $\leftarrow$ offene Übedeckung von K
$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow}$ $\exists a_1, \dots, a_q \in D : \quad K \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_q}$ $\leftarrow$ endliche Teilüberdeckung.
Sei $\epsilon > 0$, $N_1, \dots, N_q$ mit: $|f - f_n| < \epsilon$ auf $U_{a_1} \cap D$ für $n > N_1$, $\dots$, $|f - f_n| < \epsilon$ auf $U_{a_q} \cap D$ für $n > N_q$
$\Rightarrow$ Für $N := \max(N_1, \dots, N_q)$ gilt $|f - f_n| < \epsilon$ auf $(U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_q}) \cap D \supset K$. ■

Bemerkung 5.5 Folgen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig konvergieren, heißen kompakt konvergent. Ist $D \subset \mathbb{R}^p/\mathbb{C}^p$ offen, so sind kompakt konvergente Folgen lokal gleichmäßig konvergent.

Beweis: $a \in D \Rightarrow U_\epsilon(a) \subset D \Rightarrow \overline{U_{\frac{\epsilon}{2}}(a)} \subset D$ ist eine kompakte Menge.
$\Rightarrow f_n \to f$ gleichmäßig konvergent auf $\overline{U_{\frac{\epsilon}{2}}(a)}$, also auch auf $U_{\frac{\epsilon}{4}}(a) \cap D$. ■

Satz 5.6 *Sind f_n, f $D \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \to D$.*
Falls $f_n \to f$ lokal gleichmäßig, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_\gamma f_n = \int\limits_\gamma f, \qquad \int\limits_\gamma (f_n - f) \leq L(\gamma) \underbrace{\sup_{\gamma([a,b])} |f_n - f|}_{\to 0}$$

(Beweis siehe Übung) (Beachte: $\gamma([a, b])$ kompakt).

Theorem 5.7 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen,$f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen. Ist f_n lokal gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{C}$, so ist f holomorph und ${f_n}'$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.*

Beweis: f ist stetig. Sei $\Delta \subset D$ ein beliebiges Dreieck.
Dann ist $\int\limits_{\partial\Delta} f = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_n = 0$
$\underset{(4.45)}{\overset{\text{Morera}}{\Rightarrow}}$ f holomorph.

Sei $U_r(z_0) \subset D,\ z \in U_r(z_0)$.

$$f_n{}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \ \to\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = f'(z).$$

Auf $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ ist

$$\begin{aligned} |f_n{}' - f'|(z) &\le \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial U_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{\zeta \in \partial U_r(z_0)} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} \\ &\le \underbrace{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{r^2} \cdot 2\pi r}_{=\frac{4}{r}} \cdot \underbrace{\sup_{\partial U_r(z_0)} |f_n - f|}_{<\epsilon \ \textit{für}\ n > N_0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_n{}' \to f'$ gleichmäßig konvergent auf $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$. ∎

Bemerkung 5.8 Aus Satz 5.7 folgt: der (lokal) gleichmäßige Limes von Polynomen ist holomorph.
Für reelle Polynome gilt: Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist gleichmäßiger Limes von Polynomen. (Approximationssatz von Weierstraß)

Satz 5.9 *(Cauchy-Kriterium)*
Eine Folge $f_n : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit:
Für alle $m, n \ge N$ ist $\sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ Für jedes $z \in D$ ist $(f_n(z))$ Cauchyfolge. Sei $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$
$\Rightarrow f_n \to f$ punktweise.
Für alle $z \in D$, alle m, n ist $|f(z) - f_n(z)| \le |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)|$
Sei $\epsilon > 0$.
Wähle N so groß, dass für alle $z \in D$, alle $n, m \ge N$: $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$.
Für $z \in D$ wähle $m = m_z > N$ so, dass $|f(z) - f_{m_z}(z)| < \epsilon$ (geht, da punktweise konvergent).
$\Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \epsilon + \epsilon \ \ \forall z,\ \forall n \ge N$.

„$\Rightarrow$“ $\sup_z |f_n(z) - f_m(z)| \le \sup_z |f_n(z) - f(z)| + \sup_z |f(z) - f_m(z)| < 2\epsilon$ für $m, n \ge N$

■

Definition 5.10 *Eine Reihe von Funktionen* $f_0+f_1+\dots,\ f_n : D \to \mathbb{C}$ *heißt (lokal) gleichmäßig konvergent, wenn die Folge* $(S_n),\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ *(lokal) gleichmäßig konvergiert.*

Schreibe: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *(falls die Reihe konvergiert)*

Definition 5.11 *(Normale Konvergenz)*
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n,\quad f_n : D \to \mathbb{C}$ *heißt normal konvergent, wenn es für jedes* $z \in D$ *eine Umgebung* U *von* z *in* $\mathbb{C}$ *und eine Folge* $(M_n),\ M_n \geq 0$ *gibt, so dass*

(i) $|f_n(z)| \leq M_n$ *für* $z \in U \cap D$ *und*

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$.

Satz 5.12 *Normal konvergente Reihen sind lokal gleichmäßig konvergent.*

Beweis: Sei $a \in D,\ U, M_n$ wie oben.

$$\left|\sum_{n=K+1}^{N} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=K+1}^{N} |f_n(z)| \leq \sum_{n=K+1}^{N} M_n < \epsilon \text{ für } N \geq K+1 \geq N_0(\epsilon)$$

$\Rightarrow$ ist Cauchy-Reihe $\Rightarrow$ gleichmäßig konvergentt auf $U \cap D$. ■

Bemerkung 5.13 „lokal gleichmäßige Version“ des Vergleichskriteriums für Zahlenreihen
Standard-Vergleichsreihe: $M_n := Aq^n,\ q < 1 :\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{A}{1-q} < \infty$.

Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ für $|z| < 1$ normal konvergent, denn für $|z| \leq q < 1$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} < \infty$.

Satz 5.14 *Seien* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *holomorph,* $D \subset \mathbb{C}$ *offen,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *normal konvergent gegen* $f : D \to \mathbb{C}$.
Dann ist f *holomorph und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} {f_n}'$ *konvergiert normal gegen* f'.

Beweis: f holomorph folgt aus lokal gleichäßiger Konvergenz.
Sei $a \in D,\ \epsilon > 0$ mit $U_{2\epsilon}(a) \subset D$. Sei M_n eine Majorante für f_n auf $U_{2\epsilon}(a)$, also $|f_n(z)| \leq M_n$ auf $U_{2\epsilon}(a)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$.
Dann ist für $z \in U_\epsilon(a)$:

$$\begin{aligned}
|f_n{}'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|w-a|=2\epsilon\}} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M_n}{\epsilon^2} \cdot 2\pi \cdot 2\epsilon \ = \ \frac{2M_n}{\epsilon} \\
& \quad (|z-a| < \epsilon,\ |w-a| = 2\epsilon \ \Rightarrow \ |z-w| \geq \epsilon) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2M_n}{\epsilon} &= \frac{2}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \ < \ \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ es gibt eine konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n{}'$, also konvergiert die Reihe normal. ■

Beispiel 5.15 (Riemannsche Zetafunktion)
Die Reihe $\zeta(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert normal in $\{\mathrm{Re}\ z > 1\}$.
Für $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^z} &= \exp(-z \log n) \ = \ \exp(-x \log n) \cdot \overbrace{\exp(-iy \log n)}^{|\bullet|=1} \\
\left|\frac{1}{n^z}\right| &= \exp(-x \log n) \ = \ \frac{1}{n^x}
\end{aligned}$$

Für $x \geq 1 + \delta > 1$:
$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ ist konvergent.

Definition 5.16 *Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $b \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$.*

Bemerkung 5.17 Durch Substitution $\zeta = z - b$ reicht es, die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 zu betrachten.

Satz 5.18 *(Konvergenzradius)*
Zu einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei $R := \sup\{t > 0 : \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| t^n < \infty\} \in [0, \infty]$.
Dann gilt:

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ist in* $\{|z| < R\}$ *normal konvergent.*

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ist in keinem Punkt* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}$ *konvergent.*

(falls $R = 0:$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *konvergiert genau für* $z = 0$*)*

R heißt Konvergenzradius, $U_R(0)$ *heißt Konvergenzkreis (Konvergenzkreisscheibe).*

Beweis:

(ii) Ist $|z| > R \Rightarrow (|a_n||z|^n)$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert.

(i) Wir zeigen; Für alle $0 < \rho < R$ hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine konvergente Majorante in $\overline{U_\rho(0)}$. Sei $\tilde{\rho} \in (\rho, R) \Rightarrow M = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}(|a_n|\tilde{\rho}^n) < \infty$.

$\Rightarrow$ für $|z| \leq \rho$ ist $|a_n z^n| \leq |a_n|\rho^n \leq |a_n|\tilde{\rho}^n \cdot \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^n \leq M \cdot \underbrace{\left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)}_{=:q<1}^n$

$= Mq^n =: M_n, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$

$\Rightarrow$ normale Konvergenz.

■

Bemerkung 5.19 Es ist auch $R = \sup\{t > 0 : \ a_n t^n \text{ ist Nullfolge}\}$.

Satz 5.20 *(Formeln für den Konvergenzradius)*
R *=Konvergenzradius von* $\sum a_n z^n$.

(i) Es ist $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{\infty} := 0, \ \frac{1}{0} := \infty\right)$.

(ii) Ist $a_n \neq 0$ *für alle* n*, so ist*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

also $R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *falls dieser Limes existiert.*

Beweis:

(i) Sei $L := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Zeige: $L \leq R,\ R \leq L$.
Es reicht zu zeigen: Ist $0 < r < L$, so $r \leq R$ und ist $L < s < \infty$, so $s \geq R$.
Sei also $0 < r < L$. $\Rightarrow \frac{1}{r} > \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$ für $n \geq N_0$
$\Rightarrow (|a_n| r^n)$ ist beschränkt $\Rightarrow r \leq R$.
$L < s < \infty \Rightarrow$ es gibt Teilfolge (n_k) mit $|a_{n_k}| \geq \frac{1}{s^{n_k}} \Rightarrow (|a_{n_k}| s^{n_k})_k$ keine Nullfolge, also $s \geq R$.

(ii) Sei $S = \liminf \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},\ T = \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.
$0 < s < S \Rightarrow s < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ für $n \geq N_0$.
$\overset{Induktion}{\Rightarrow} |a_{N_0+k}| s^k \leq |a_{N_0}| \Rightarrow (|a_n| s^n)$ beschränkt $\Rightarrow s \leq R \Rightarrow S \leq R$.
$t > T \Rightarrow a_n t^n$ keine Nullfolge $\Rightarrow T \geq R$.

■

Beispiel 5.21 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n : \quad R = \frac{1}{\limsup n} = 0$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n : \quad R = 1$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} : \quad \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = (1 + \frac{1}{n})^p \to 1 \Rightarrow R = 1$.

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} : \quad \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \liminf \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty$.

Satz 5.22 *Potenzreihen stellen in ihrem Konvergenzkreis holomorphe Funktionen dar. Die Ableitung erhält man durch gliedweises Differenzieren; sie hat denselben Konvergenzradius.*

Beweis: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert normal in $\{|z| < R\}$
$z \mapsto a_n z^n$ ist holomorph $\overset{\text{Satz 5.14}}{\Rightarrow} f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ist normal konvergent in $\{|z| < R\}$.
$\Rightarrow$ (Konvergenzradius für f')$\geq$(Konvergenzradius für f)
$|na_n| \geq |a_n| \Rightarrow$ Konvergenzradius kann nicht größer werden. ■

Theorem 5.23 *(Holomorphe Funktionen lassen sich in Potenzreihen entwickeln).*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in D$, $U_R(p) \subset D$.
Dann gilt für alle $z \in U_R(p)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \text{ mit } a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$$

Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $\geq R$. Für $\rho \in (0,R)$ lassen sich die Koeffizienten berechnen durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_\rho(p)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-p)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis:

1.Schritt: Falls $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ in $\{|z|<r\}$, so folgt: a_n ist eindeutig $=$ Taylorkoeffizienten.
<u>denn:</u> normale Konvergenz $\Rightarrow$ normale Konvergenz aller Ableitungen
$f(p) = a_0,\ f'(p) = a_1,\ f''(p) = 2a_2$
$\Rightarrow f^{(n)}(p) = n!a_n$.

2.Schritt: Für $r < R$ ist $\overline{U_r(p)} \subset D$, also nach Cauchyformel
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(p)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta$.
Idee: Entwickle $\frac{1}{\zeta-z}$ in eine Potenzreihe!
$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-p}\cdot\frac{\zeta-p}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-p}\cdot\frac{\zeta-p}{(\zeta-p)-(z-p)} = \frac{1}{\zeta-p}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-p}{\zeta-p}}, \quad |\frac{\zeta-z}{\zeta-p}| < \frac{r}{r} = 1$
<u>Für jedes feste z:</u>
$\frac{1}{\zeta-p}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-p}{\zeta-p}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-p}{\zeta-p}\right)^n$ gleichmäßig konvergent in $\{|\zeta-p| = r\}$.
$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-p)^n}{(\zeta-p)^{n+1}}\cdot f(\zeta)$
$\overset{\text{Satz 5.6}}{\Rightarrow} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(p)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\partial U_r(p)} \frac{(z-p)^n}{(\zeta-p)^{n+1}}\cdot f(\zeta)\, d\zeta$
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(p)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-p)^{n+1}}\, d\zeta\right)\cdot (z-p)^n$
Eindeutigkeit der Koeffizienten $\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(p)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-p)^{n+1}}\, d\zeta$

■

Wir haben jetzt viele äquivalente Charakterisierungen holomorpher Funktionen kennengelernt:

Satz 5.24 *Für $f: D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$ offen sind äquivalent:*

(0) f ist holomorph.

(i) f ist in jedem $z \in D$ komplex differenzierbar.

(ii) *f ist in jedem $z \in D$ total reell differenzierbar und es gelten die CRD.*

(iii) *f ist stetig, und für jedes Dreieck $\Delta \subset D$ gilt $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.*

(iv) *f besitzt lokal eine Stammfunktion, d.h. zu jedem Punkt $a \in D$ gibt es ein $r > 0$ so, dass $U_r(a) \subset D$ und $f|_{U_r(a)}$ eine Stammfunktion besitzt.*

(v) *f ist stetig und für jede Kreisscheibe $U_r(a)$ mit $\overline{U_r(a)} \subset D$ gilt: für alle $z \in U_r(a)$: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$.*

(vi) *f ist auf jeder in D enthaltenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar.*

(vii) *f ist lokal als Potenzreihe darstellbar, d.h. zu jedem $a \in D\, \exists r > 0$ mit $U_r(a) \subset D$ und eine in $U_r(a)$ konvergente Potenzreihe, die mit f übereinstimmt.*

Beweis:

(0)⇔(i) Definition

(0)⇔(ii) Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen (CRD)

(0)⇐(iii) Morera

(0)⇒(iii) Goursat

[(ii)⇒(iii) Bemerkung 4.50]

(0)⇒(iv) $U_\epsilon(a)$ ist Elementargebiet (Cauchyscher Integralsatz)

(0)⇐(iv) $f = F'$

(0)⇒(v) Cauchyformel

(v)⇒(vi) Beweis von Theorem 5.23

(vi)⇒(vii) klar

(vii)⇒(0) Satz 5.22

■

Bemerkung 5.25 Konvergenz auf dem Rand.
Ist R der Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so kann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle, manche oder keine Punkte aus $\overline{U_r(0)}$ konvergieren:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert für alle $|z| = 1$, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

(ii) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ konvergiert nicht für $z = 1$ (harmonische Reihe), aber konvergiert für $z = -1$ (alternierende Reihe).

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert für kein $|z| = 1$ (z^n ist keine Nullfolge).

Bemerkung 5.26 (i) Potenzreihenentwicklung von $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{z^2+1}$ um 0.
$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Konvergenzradius ≥ 1 (Entwicklungssatz). Andererseits Konvergenzradius ≤ 1 (betrachte $z = i$).
Fazit: Konvergenzradius$= 1$.

(ii) Logarithmusreihe: Sei $a \in \mathbb{C}_-$. Bestimme Potenzreihe von $\operatorname{Log}(z)$ um a.
Taylorreihe: $f(z) = \operatorname{Log}(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(z-a)^n$, denn $\operatorname{Log}^{(n)}(a) = \frac{(-1)^{n-1}}{a^n}(n-1)!$ Konvergenzradius ist $|a|$.
Wähle a mit Re $a > 0$.
Also: Konvergenzkreis ist nicht vollständig in $\mathbb{C}_-$ und größer als der größte Kreis um a ganz in $\mathbb{C}_-$. Es gilt $f(z) = \operatorname{Log} z$ nur auf der gleichen Seite des Schlitzes, auf der a liegt; auf der anderen Seite $f(z) = \operatorname{Log} z \pm 2\pi i$.

Bemerkung 5.27 Rechnen mit Potenzreihen.

(i) Identitätssatz: Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergente Potenzreihen, die in einer Umgebung um 0 dieselbe Grenzfunktion haben, so ist $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
(Beweis: Differenzieren ergibt Taylorreihe, vergleiche Beweis Theorem 5.23.)

(ii) Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq R > 0$, so ist für $|z| < R$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
(Beweis: Produkt ist holomorph in $\{|z| < R\}$, also in Potenzreihe

entwickelbar.
Differenzieren und Leibniz-Formel $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(k)} g^{(n-k)} \binom{n}{k}$
$\Rightarrow n!c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} k!a_k \cdot (n-k)!b_{n-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow c_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$.)

(iii) <u>Kehrwert:</u> Ist $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\{|z| < R\}$ konvergent, und $a_0 \neq 0$
$\Rightarrow P \neq 0$ in $\{|z| < r\}$. $\Rightarrow Q := \frac{1}{P}$ ist auf $\{|z| < r\}$ holomorph
$\Rightarrow Q(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergiert in $\{|z| < r\}$
Mit (ii). Da $P(z) \cdot Q(z) = 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, also
$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$
$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{-a_1 b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$, usw.
Rekursiv lassen sich alle Koeffizienten von b_n berechnen.

(iv) Doppelreihensatz von Weierstraß:
Falls die Potenzreihe $f_j := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^k$ in $U_r(0)$ konvergiert
und die Funktionenreihe $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ <u>normal</u> konvergiert, so ist
die Grenzfunktion F holomorph in $U_r(0)$ und $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{jk} \right) z^k$.
„Konvergente Potenzreihen dürfen addiert werden, und ihre Summationen dürfen vertauscht werden.“
(Beweis: F ist holomorph in $U_r(0)$ als normaler Grenzwert holomorpher Funktionen.
$\overset{\text{Entwicklungs-}}{\underset{\text{satz}}{\Rightarrow}} F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k,\ b_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!},\quad F^{(k)}(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$
$\Rightarrow \frac{F^{(i)}(0)}{k!} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f_j^{(k)}(0)}{k!} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{jk}$. $\square$)

Kapitel 6

Abbildungsverhalten und Singularitäten holomorpher Funktionen

Satz 6.1 *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet.*
Die Menge der Nullstellen von f $N(f) := \{z \in D : f(z) = 0\}$ ist diskret in D, falls f <u>nicht</u> die Nullfunktion ist.

Beweis: $U := \{z \in D : z$ ist Häufungspunkt von $N(f)\}$.
Falls $U = \emptyset$: klar.
Wir zeigen zunächst, dass U offen ist:
Sei $a \in U$. $\exists r > 0$ mit $U_r(a) \subset D$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ für $|z-a| < r$.
Behauptung: Alle Koeffizienten $= 0$.
1.Schritt: $a_0 = f(a) = 0$ als Limes von $f(z_n),\ z_n \in N(f)$.
2.Schritt: Betrachte die Reihe $f_1(z) = \frac{f(z)}{z-a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^{n-1}$.
Es gilt: $0 = f_1(z_n) \to f_1(a)$, also $a_1 = f_1(a) = 0$.
Induktiv: $f_k(z) = \frac{f(k)}{(z-a)^k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^{n-k}$ erfüllt $f_k(a) = 0$, also $a_k = 0$.
$\Rightarrow f \equiv 0$ auf $U_r(a) \Rightarrow U_r(a) \subset U \Rightarrow U$ offen.
Weiter $V := \{z \in D : z$ ist <u>kein</u> Häufungspunkt von $N(f)\}$ ist offen (klar!).
Weiter $V \cap U = \emptyset$. $V \cup U = D$.
Setze $g : D \to \mathbb{C},\quad g(z) := \begin{cases} 1 & z \in U \\ 0 & z \in V \end{cases}$.
Klar: g ist lokal konstant $\overset{D \text{ zusammenhängend}}{\Rightarrow}$ f konstant.$\Rightarrow g \equiv 1 \Rightarrow V = \emptyset,\ U = D$

$\Rightarrow f \equiv 0.$ ■

Satz 6.2 *(Identitätssatz für holomorphe Funktionen)*
Sei $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet.
Dann sind äquivalent:

(i) $f = g$.

(ii) Die Koinzidenzmenge $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungsunkt in D.

(iii) Es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: (i)⇒(ii) klar, (ii)⇒(iii) und (iii)⇒(i) folgen aus Satz 6.1 angewandt auf $f - g$. ■

Korollar 6.3 *(Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)*
Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subset D$ eine Menge mit Häufungspunkt $\in D$ und $f : M \to \mathbb{C}$.
Wenn es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}|_M$ gibt, so ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung 6.4 Eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, ist durch die Werte auf einer beliebigen Kreisscheibe $U_\epsilon(z_0) \subset D$ eindeutig bestimmt.
Für Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ falsch.
Beispiel: $\eta(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) & |r| < 1 \\ 0 & |r| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$

Definition 6.5 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Mit $\mathcal{O}(D)$ bezeichnen wir den kommutativen Ring (mit 1), der auf D holomorphen Funktionen mit den Operationen punktweise Addition/Multiplikation*

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) \quad (fg)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

Satz 6.6 *$\mathcal{O}(D)$ ist nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ D ist ein Gebiet.*

Beweis:

„⇒“ Zeige: D kein Gebiet $\Rightarrow \mathcal{O}(D)$ nicht nullteilerfrei.
D nicht zusammenhängend $\Rightarrow$ es gibt eine Funktion $h : D \to \mathbb{C}$, die lokal konstant, aber nicht konstant ist. Sei $a \in h(D)$.
Setze $\tilde{h} : D \to \mathbb{C}, \quad \tilde{h}(z) = \begin{cases} 0 & h(z) = a \\ 1 & h(z) \neq a \end{cases}$
$\Rightarrow \tilde{h}$ ist lokal konstant. $\Rightarrow \tilde{h}$ holomorph.
$\tilde{h}(1 - \tilde{h}) \equiv 0$, aber weder $\tilde{h}$ noch $(1 - \tilde{h})$ sind die Nullfunktion.

„$\Leftarrow$" Sei D ein Gebiet. Seien $f, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f(z) \cdot g(z) = 0 \ \forall z \in D$.
Annahme: f ist nicht die Nullfunktion $\Rightarrow$ es existiert $a \in D$ mit $f(a) \neq 0$.
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0,\ U_\epsilon(a) \subset D$ mit $f(z) \neq 0$ für $z \in U_\epsilon(a)$.
$\Rightarrow$ Für $z \in U_\epsilon(a)$ ist $0 = \frac{f(z) \cdot g(z)}{f(z)} = g(z)$
$\overset{\text{Identitätssatz}}{\Rightarrow} g(z) = 0 \ \forall z \in D$.

■

Definition 6.7 *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ eine Nullstelle von f (also $f(z_0) = 0$). Die kleinste natürliche Zahl k mit $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ heißt Ordnung oder Vielfacheit der Nullstelle.*

Bemerkung 6.8 Sei D ein Gebiet. Die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ haben endliche Ordnung, außer wenn f die Nullfunktion ist. (Andernfalls: jede Ableitung bei z_0 ist $0 \Rightarrow$ Taylorreihe ist $0 \Rightarrow$ Funktion ist 0).

Satz 6.9 *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$ eine k-fache Nullstelle von f, so gibt es $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(z_0) \subset D$ und eine holomorphe Funktion h, die in z_0 eine einfache Nullstelle hat und $f(z) = (h(z))^k$ in $U_\epsilon(z_0)$ erfüllt.*

Beweis: Wir entwickeln f nahe z_0 in eine konvergente Potenzreihe.
OBdA. $z_0 = 0$.
Da $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \underbrace{\left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^{n-k} \right)}_{g(z)} \text{ in } U_{\epsilon_1}(0).$$

Satz 4.51 $\Rightarrow g$ besitzt auf dem Elementargebiet $U_{\epsilon_2}(0)$ eine holomorphe k-te Wurzel h_1 mit $(h_1(z))^k = g(z)$ in $U_{\epsilon_2}(0),\ h_1 \neq 0$.
$\Rightarrow z \cdot h_1(z)$ hat in 0 eine einfache Nullstelle
$((z \cdot h_1)'(0) = h_1(0) + 0 \cdot h_1'(0) \neq 0)$.
$(z \cdot h_1(z))^k = z^k \cdot g(z) = f(z)$. ■

Satz 6.10 *(Blätterzahl nahe einer k-ten Nullstelle)*
Sei $z_0 \in D$ eine k-fache Nullstelle eine holomorphhen Funktion : $D \to \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ so, dass für alle $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ es eine Umgebung V_ϵ von z_0 gibt, die durch f auf $U_\epsilon(0)$ abgebildet wird. Dabei nimmt $f|_{V_\epsilon}$ jeden Wert $w \in U_\epsilon \setminus \{0\}$ genau k-mal an, den Wert 0 nur bei z_0.

Beweis: OBdA. $z_0 = 0$.

1.Schritt: $f(z) = z^k$, $V_\epsilon = U_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0)$ wird durch f auf $U_\epsilon(0)$ abgebildet, und jeder Wert $\neq 0$ wird genau k-mal angenommen, $\left[(r \cdot e^{i\vartheta})^k = r^k e^{ik\vartheta}\right]$, 0 nur bei 0.

2.Schritt: Nach Satz 6.9 können wir $f(z) = (h(z))^k$ annehmen, $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$.
$\Rightarrow$ h ist in einer Umgebung von 0 konform, d.h. es gibt Umgebungen V_1, V_2 von 0 so, dass $h : V_1 \to V_2$ und $h^{-1} : V_2 \to V_1$ bijektiv und holomorph sind.
Ist ϵ_1 so klein, dass $U_{\sqrt[k]{\epsilon_1}}(0) \subset V_2$, dann hat für $\epsilon < \epsilon_1$ $V_\epsilon := h^{-1}(U_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0))$ die gewünschten Eigenschaften:

$$f = h^k, \qquad \begin{tikzcd} V_\epsilon \arrow[r, "h", "\text{„1:1“}"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & U_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0) \arrow[r, "z \mapsto z^k", "\text{„}k\text{:1“}"'] & U_\epsilon(0) \end{tikzcd}$$

■

Theorem 6.11 *(Satz von der Gebietstreue).*
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $f(D)$ ein Gebiet, falls f nicht konstant ist.

Beweis: Klar: $f(D)$ ist zusammenhängend als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge.
Zeige noch: $f(D)$ ist offen. Sei $w_0 \in f(D)$, also $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in D$.
$f - w_0$ hat bei z_0 eine Nullstelle. Da f nicht konstant $\Rightarrow$Nullstelle ist von endlicher Ordnung.
$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Rightarrow}$ Eine Umgebung von z_0 wird durch $(f - w_0)$ auf $U_\epsilon(0)$ abgebildet. f bildet auf $U_\epsilon(w_0) = w_0 + U_\epsilon(0)$ ab.
$\Rightarrow U_\epsilon(w_0) \subset f(D) \Rightarrow f(D)$ offen. ■

Korollar 6.12 *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D ein Gebiet. Ist* $\operatorname{Re} f = const.$ *oder* $\operatorname{Im} f = const.$ *oder* $|f| = const.$*, so ist f konstant.*

Beweis: Betrachte $f(D) \subset \{\operatorname{Re} = const.\}$, $\{\operatorname{Im} = const.\}$, $\{|\bullet| = const.\}$. Diese Mengen haben keine inneren Punkte, also keine nichtleere offene Teilmenge, also muss f konstant sein. ■

Korollar 6.13 *(Maximumprinzip).*
Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, D ein Gebiet, so kann $|f|$ kein lokales Maximum in D haben, es sei denn, f ist konstant.

Beweis:

1.Schritt: Es existiert kein globales Maximum:
Falls $z_0 \in D$ ein globales Maximum ist $\Rightarrow |f(z)| \leq |f(z_0)|\ \forall z \in D$.
f nicht konstant $\Rightarrow f(D)$ ist offen $\Rightarrow$ es gibt $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(f(z_0)) \subset f(D)$
$\Rightarrow$ es gibt z_1 mit $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ ↯.

2.Schritt: Falls z_0 nur lokales Maximum $\Rightarrow f$ in einer Umgebung von z_0 konstant $\overset{\text{Identitätssatz}}{\Rightarrow} f$ konstant.

■

Korollar 6.14 *(Minimumprinzip).*
Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Falls f nicht konstant ist und $a \in D$ ein lokales Minimum von $|f|$ ist $\Rightarrow f(a) = 0$.

Beweis: Falls $f(a) \neq 0 \Rightarrow |\frac{1}{f}|$ hat lokales Maximum bei a, $\frac{1}{f}$ ist holomorph nahe $a \Rightarrow \frac{1}{f}$ ist konstant $\Rightarrow f$ konstant. ■

Korollar 6.15 *(Neuer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra)*
Sei P ein nichtkonstantes Polyom. Dann hat P eine Nullstelle.

Beweis: $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty \Rightarrow |P|$ hat ein Minimum $a \in \mathbb{C} \Rightarrow P(a) = 0$. ■

Satz 6.16 *(Schwarzsches Lemma)*
($\mathbb{E} := U_1(0)$.) *Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ und $f(0) = 0$.*
Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und für alle $z \in \mathbb{E}$ ist $|f(z)| \leq |z|$.
Falls $|f'(0)| = 1$ oder für ein $0 \neq z_0 \in \mathbb{E}\ \ |z_0| = |f(z_0)|$, so ist f eine Drehung: $f(z) = e^{i\vartheta}z, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$.

Beweis: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (a_0 = f(0) = 0)$.
$\Rightarrow f(z) = z \cdot g(z), \quad g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ holomorph in $\mathbb{E}$.
$f'(0) = a_1 = g(0)$.
Für $z \in \mathbb{E}$, $|z| = r < 1$ ist $|f(z)| \leq 1$, also $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$
$\Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für alle z mit $|z| \leq r$.
(Wenn nicht, dann hat $|g|$ ein Maximum $> \frac{1}{r}$ in $U_r(0)$. ↯)
$\Rightarrow$ Für alle $r \in (0, 1)$ ist $|g| \leq \frac{1}{r}$ auf $\overline{U_r(0)}$.

$\overset{r\to 1}{\Rightarrow} |g| \leq 1$ in $\mathbb{E} \Rightarrow 1 \geq |g(0)| = |f'(0)|$.
$|f(z)| = |z| \cdot |g(z)| \leq |z|$.
Ist irgendwo $|g(z_0)| = 1$, $z_0 \in \mathbb{E} \Rightarrow |g|$ hat ein Maximum in $z_0 \Rightarrow g$ ist konstant.
$|g| = 1 \Rightarrow g(z) = e^{i\vartheta}$. ■

Korollar 6.17 *Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph (bijektiv, f, f^{-1} holomorph) und $f(0) = 0$. Dann ist f eine Drehung.*

Beweis: f, f^{-1} erfüllen das Schwarzsche Lemma.
$\Rightarrow$ für alle $z \in \mathbb{E}$ ist $|f(z)| \leq |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$
$\Rightarrow |f(z)| = |z| \Rightarrow$Drehung. ■

Lemma 6.18 *Für $a \in \mathbb{E}$ hat die Möbiustransformtion $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *ist konforme Abbildung.*

(ii) $\varphi_a(0) = a$.

(iii) $\varphi_a(a) = 0$.

(iv) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

Beweis: Erinnerung: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ entspricht der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$\det \begin{pmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{pmatrix} = -1 - (-a)\bar{a} = |a|^2 - 1 \neq 0$.
$\Rightarrow \varphi_a$ ist tatsächlich Möbiustransformation.
Für $|z| < 1$ ist $|\bar{a}z| = |a| \cdot |z| < 1 \Rightarrow 1 - \bar{a}z \neq 0$.
$\Rightarrow \varphi_a : \mathbb{E} \to \varphi_a(\mathbb{E})$ bijektiv.
$\varphi_a \circ \varphi_a$? (ist Möbiustransformation zur Produktmatrix)
$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - |a|^2 & -a + a \\ \bar{a} - \bar{a} & -|a|^2 + 1 \end{pmatrix} = (1 - |a|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Also $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$.

Zeige: $\varphi_a(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E} \Leftrightarrow |z - a|^2 < |\bar{a}z - 1|^2 \; \forall z$.
$\Leftrightarrow |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 < |a|^2 \cdot |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + 1$
$\Leftrightarrow 0 < 1 - |a|^2 - |z|^2 + |a|^2 \cdot |z|^2 = \underbrace{(1 - |a|^2)}_{>0} \underbrace{(1 - |z|^2)}_{>0}$
(siehe Übung 1).
$\varphi_a(0) = \frac{-a}{-1} = a$. ■

Theorem 6.19 *Wir setzen* Aut $(\mathbb{E}) := \{g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *konform* $\}$ *(die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$).*
Es ist $\varphi \in$ Aut $(\mathbb{E}) \Leftrightarrow$ es gibt $\vartheta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{E}$ mit $\varphi(z) = e^{i\vartheta}\varphi_a(z) = e^{i\vartheta}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.

Beweis: $a := \varphi^{-1}(0)$. $\Rightarrow \varphi \circ \varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ist konform und $\varphi(\varphi_a(0)) = 0$.
$\overset{6.17}{\Rightarrow} \varphi(\varphi_a(z)) = e^{i\vartheta} z \Rightarrow \varphi(w) = e^{i\vartheta}\varphi_a(w)$ für $w = \varphi_a^{-1}(z) \in \mathbb{E}$. ∎
Anmerkung: Was passiert bei $|a| \to 1$?

Definition 6.20 *(i) Für $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ setzen wir $\dot{U}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\} = U_r(a) \setminus \{a\}$ die punktierte Kreisscheibe vom Radius r um a.*

(ii) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C} \setminus D$ mit $\dot{U}_r(a) \subset D$ für ein $r > 0$, so heißt a eine isolierte Singularität von f.

Ziel: Klassifikation der isolierten Singularitäten.

Beispiel 6.21 $D = \dot{U}_1(0)$.

(i) $f(z) = \frac{1}{z}$ Pol.

(ii) $f(z) = z$ klar: können nach 0 fortsetzen.

(iii) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ können stetig fortsetzen.

(iv) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ (wesentliche Singularität).

Definition 6.22 *Eine isolierte Singularität a von $f : D \to \mathbb{C}$ heißt hebbar, wenn es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}|_D = f$.*

Bemerkung 6.23 Ist a hebbare Singularität $\Rightarrow \tilde{f}(z) = \begin{cases} \lim\limits_{z \to a} f(z) & z = a \\ f(z) & z \neq a. \end{cases}$

Theorem 6.24 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Eine isolierte Singularität a einer holomorphen Funktion f ist genau dann hebbar, falls es eine punktierte Kreisscheibe $\dot{U} = \dot{U}_r(a)$ gibt, auf der f beschränkt ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ klar, da $\tilde{f}|_{\overline{U_{\frac{r}{2}}(a)}}$ stetig.

„$\Leftarrow$“ Sei f in $\dot{U}_r(a)$ beschränkt.
Setze $h : U_r(a) \to \mathbb{C}$, oBdA. $a = 0$.
$h(z) = \begin{cases} z^2 f(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$.

<u>h ist holomorph</u>: Differenzierbarkeit in $\dot{U}_r(0)$ klar.
<u>Differenzierbarkeit in 0</u>:

$$\frac{h(z)-h(0)}{z-0} = \frac{z^2 f(z)}{z} = zf(z) \to 0 \ (z \to 0) \quad \Rightarrow a_1 = h'(0) = 0$$

(denn $|zf(z)| \leq C|z|$.)
Entwickle h in eine Potenzreihe: (konvergiert auf $U_r(0)$)

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow \tilde{f} = \frac{1}{z^2}h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$$

ist die holomorphe Fortsetzung von f auf $U_r(0)$.

■

Beispiel 6.25 (i) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat eine hebbare Singularität.
Das sieht man direkt an der Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \dots \\ \frac{\sin z}{z} &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \dots \end{aligned}$$

(ii) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ bei 0.

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ \left|\frac{e^z-1}{z}\right| &= \underbrace{\left|1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right|}_{(*)} \geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \left|\frac{z}{e^z-1}\right| &\leq 2 \ \ (\text{für } 0 < |z| < \epsilon_0). \end{aligned}$$

$(*)$=konvergente Potenzreihe, also stetige Funktion nahe 0

Definition 6.26 *Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f : D \to \mathbb{C}$. a heißt Pol, wenn ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert so, dass $(z-a)^m f(z)$ bei a eine hebbare Singularität hat. Die kleinste solche Zahl heißt Ordnung des Pols. Falls keine solche Zahl existiert, heißt a eine wesentliche Singularität.*
(Beispiel: $\frac{1}{z^2}$ hat in 0 einen Pol 2.Ordnung).

Beispiel 6.27 $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hat bei 0 eine wesentliche Singularität.

<u>Zu zeigen:</u> $z^m \exp \frac{1}{z}$ ist nicht beschränkt nahe 0.

Sonst: $|z^m||\exp \frac{1}{z}| \leq C$

$z = x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x^m \exp \frac{1}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^m}{\underbrace{n!x^n}_{>0}} \leq C$

$\Rightarrow$ Für $n > m$ ist $\frac{1}{n!x^{n-m}} \leq C \ \Rightarrow\ x^{m-n} \geq C^{-1}n!$ ↯

Theorem 6.28 *(Satz von Casorati-Weierstraß)*
Sei a eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt für jede punktierte Umgebung $\dot{U}_r(a)$:
$f(\dot{U}_r(a))$ ist dicht in $\mathbb{C}$, d.h. für alle $b \in \mathbb{C}$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein $z \in D$ mit $|z-a| < r$ und $|f(z) - b| < \epsilon$.

Beweis: Annahme, nicht: Es gibt $b \in \mathbb{C},\ \epsilon > 0$ mit $|f(z) - b| \geq \epsilon$ in $\dot{U}_r(a)$.
Betrachte $z \mapsto \frac{1}{f(z)-b} =: g(z)$. Diese Funktion ist beschränkt in $\dot{U}_r(a)$
$\overset{\text{Riem. Hebb.-Satz}}{\Rightarrow}$ a ist hebbare Singularität von g.
$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$ hat in a höchstens einen Pol, also keine wesentliche Singularität. ■

Bemerkung 6.29 (Großer Satz von Picard)
Es gilt sogar: $f(\dot{U}_r(a))$ ist $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ für ein p.
(Beispiel: $\sin \frac{1}{z},\quad \exp \frac{1}{z}$).
(ohne Beweis)

Satz 6.30 *(Pole sind Unendlichkeitsstellen)*
Sei a eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist a ein Pol $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ a Pol $\Rightarrow h(z) := (z-a)^m f(z)$ hat hebbare Singularität, $m \geq 1$
$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m},\ h(z)$ beschränkt. m minimal $\Rightarrow h(a) \neq 0$.
$\Rightarrow |h(z)| \geq C$ für $|z-a| < r$.
$\Rightarrow |f(z)| \geq \frac{C}{|z-a|^m} \to \infty\ (z \to a)$.

„$\Leftarrow$“ $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty \Rightarrow f$ nicht beschränkt nahe a, also ist Singularität nicht hebbar.
$\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty \Rightarrow a$ ist keine wesentliche Singularität (sonst existiert eine Folge (z_n) mit $|f(z_n)| < 1,\ z_n \to a$).
$\Rightarrow a$ ist ein Pol.

■

Bemerkung 6.31 (Klassifikation der Singularitäten)
a ist Singularität der holomorphen Funktion $f: D \to \mathbb{C}$.

- $\limsup_{z\to a} |f(z)| < \infty \Leftrightarrow a$ ist hebbar $\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z)$ existiert.
- $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow a$ ist Pol $\Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$.
- $0 = \liminf_{z\to a} |f(z)| < \limsup_{z\to a} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow a$ ist wesentliche Singularität.

Kapitel 7

Laurentreihen und Residuen

Definition 7.1
Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ *heißt Laurentreihe (mit Entwicklungspunkt* 0*). Hierbei heißt* $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}$ *Hauptteil und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *Nebenteil der Laurentreihe.*

Eine Laurentreihe heißt konvergent | lokal gleichmäßig konvergent | gleichmäßig konvergent | absolut konvergent, etc., wenn sowohl der Haupt-, als auch der Nebenteil diese Eigenschaft haben.

Bemerkung 7.2 Skizze
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}$ ist konvergent für $|z| > r \Leftarrow$ Sei $\frac{1}{r}$ = Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.

Nebenteil konvergiert in $\{|z| < R\}$.
$\Rightarrow$ Laurentreihe konvergiert im Ringgebiet $D_{R,r} := \{z : r < |z| < R\}$ lokal gleichmäßig.

Oft ist $r = 0$, insbesondere, wenn der Hauptteil eine endliche Summe ist.
(Beispielsweise: $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$)

Falls $R < r \Rightarrow$ Laurentreihe konvergiert nirgends.
Ziel: Entwickle $f : D_{R,r} \to \mathbb{C}$ in konvergente Laurentreihe!

Lemma 7.3 *Sei* $0 \leq r < R \leq \infty$, $f : D_{R,r} \to \mathbb{C}$ *holomorph.*
Für $r < s < S < R$ *ist dann:*

$$\int\limits_{\{|\zeta|=s\}} f(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{\{|\zeta|=S\}} f(\zeta)\, d\zeta$$

Beweis: Skizzen
Müssen zeigen: $\int\limits_{\alpha_s} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\alpha_S^-} f(\zeta)\,d\zeta = 0$.
Führe Hilfswege γ_j ein, die α_s und α_S^- verbinden.

$$0 = \sum 0 = \sum \int\limits_{\beta_j} = \sum \underbrace{\left(\int\limits_{\gamma_j} + \int\limits_{\gamma_j^-} \right)}_{=0} + \int\limits_{\alpha_s} + \int\limits_{\alpha_S^-}$$

■

Theorem 7.4 *(Laurentzerlegung)*
Ist $f: D_{R,r} \to \mathbb{C}$ holomorph, $0 \le r < R \le \infty$, so gilt:

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right), \quad g: U_R(0) \to \mathbb{C}\, und\, h: U_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}\, holomorph.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig, wenn wir zusätzlich $h(0) = 0$ fordern.

Beweis:

1.Schritt: Eindeutigkeit: OBdA. $f = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= g_1(z) + h_1\left(\frac{1}{z}\right) = g_2(z) + h_2\left(\frac{1}{z}\right) \\ \Rightarrow 0 &= (g_1 - g_2)(z) + (h_1 - h_2)\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

$g: U_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $-h(\frac{1}{z}): \mathbb{C} \setminus \bar{U}_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

$$g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \text{ in } D_{R,r} \quad \Rightarrow \quad g(z) = -h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ in } D_{R,r}.$$

$$\Rightarrow H(z) = \begin{cases} g(z) & |z| < R \\ -h\left(\frac{1}{z}\right) & |z| \ge R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorph.}$$

Behauptung: H ist beschränkt, da g auf $\overline{U_\rho(0)}$ und h auf $\bar{U}_{\frac{1}{\rho}}(0)$ beschränkt ist.
$\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ H ist konstant, also $H \equiv h(0) = 0 \Rightarrow g$ und h sind die Nullfunktion.

2.Schritt: Existenz: Sei $z \in D_{R,r}$, setze $G(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$.

$\overset{\text{Riem. Hebb.-Satz}}{\Rightarrow}$ $G: D_{R,r} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Sei $r < s < |z| < S < R$. Benutze Lemma 7.3:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\zeta|=s} G(\zeta)\,d\zeta &= \int\limits_{|\zeta|=S} G(\zeta)\,d\zeta \\
\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=0,\text{ da } |z|>s} &= \int\limits_{|\zeta|=S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \underbrace{\int\limits_{|\zeta|=S} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=2\pi i,\text{ da } |z|<S} \\
\Rightarrow f(z) &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=:g(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta &= +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{\frac{1}{z}\cdot f(\zeta)}{1 - \zeta\cdot\frac{1}{z}}\,d\zeta = h\left(\frac{1}{z}\right) \\
\text{wobei } h(w) &:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=s} \frac{w\cdot f(\zeta)}{1 - \zeta\cdot w}\,d\zeta
\end{aligned}$$

Da $|z| < S \Rightarrow g$ holomorph (Differentiation von Parameterintegralen, 4.42)
und da $|z| > s \Rightarrow h$ holomorph. $h(0) = \int \frac{0\cdot f(\zeta)}{1}\,d\zeta = 0$.

■

Korollar 7.5 *$f : D_{R,r} \to \mathbb{C}$ holomorph, $0 \le r < R \le \infty$.*
Dann hat f eine in $D_{R,r}$ normal konvergente Laurententwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Die Laurentkoeffizienten sind eindeutig bestimmt durch:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta,\ \ \rho \in (r, R),\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Es ist mit $M_\rho(f) := \sup\limits_{\partial U_\rho(a)} |f|$:

$$|a_n| \le \frac{M_\rho(f)}{\rho^n},\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Potenzreihen-Entwicklung von g und h, setze Koeffizienten zusammen. ■

Satz 7.6 *Ist $r = 0$, so ist a eine isolierte Singularität von $f : D_{R,r}(a) \to \mathbb{C}$.*

(i) a ist hebbar $\Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall n < 0$.

(ii) a ist Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow a_n = 0$ für $n < -k, \ a_{-k} \neq 0$.

(iii) a ist wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.
(Dabei sei $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die Laurententwicklung von f.)

Beweis:

(i) „$\Rightarrow$" $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}), \quad h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt $\Rightarrow h$ konstant
$\Rightarrow h = 0$, also $f(z) = g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ also $a_n = 0$ für $n < 0$.

„$\Leftarrow$" f ist holomorph.

(ii) Betrachte $(z-a)^k f(z)$ und benutze (i).

(iii) ist Konsequenz von (ii).

■

Beispiel 7.7 (i) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$
$f(z) = \frac{\exp(z)-z+1}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \dots \Rightarrow$ hebbare Singularität in 0.

(ii) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{Hauptteil} \underbrace{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots}_{Nebenteil} \Rightarrow$ Pol 2.Ordnung.

(iii) $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \underbrace{1}_{Nebenteil} \underbrace{-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z^8} - \dots}_{Hauptteil\ hat\ \infty\ viele\ Koeffizienten\ \neq 0}$
$\Rightarrow$ wesentliche Singularität in 0.

Bemerkung 7.8 Die Laurentzerlegung | Laurentreihe hängt vom gewählten Ringgebiet ab.

Beispiel: $f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}, \quad f : \mathbb{C} \setminus \{1,3\} \to \mathbb{C}$.
Skizze
$D_1 := \{0 < |z| < 1\}, \ D_2 : \{1 < |z| < 3\}, \ D_3 := \{3 < |z| < \infty\}$

In D_1: $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$

$\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{3^{n+1}}) z^n$ kein Hauptteil.

In D_2: $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \overset{|z|>1 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<1}{=} \frac{1}{z} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) z^n}_{Hauptteil} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n}_{Nebenteil}$$

In D_3: $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$

$\Rightarrow f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} (3^{1-n} - 1) z^n$ (kein Nebenteil).

Definition 7.9 *(Umlaufzahl)*
Sei α eine (stückweise C^1) geschlossene Kurve, deren Bild den Punkt $z \in \mathbb{C}$ nicht enthält. Die Umlaufzahl von α um z ist definiert durch:

$$\chi(\alpha; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$$

Bemerkung 7.10 (i) Skizze
Falls α ganz in einem Elementargebiet liegt, das z nicht enthält, so ist $\chi(\alpha; z) = 0$.

(ii) Kreise: $\alpha_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha_k(t) = re^{ikt}$

$$\chi(\alpha_k; p) = \begin{cases} k & |p| < r \\ 0 & |p| > r \end{cases}.$$

$|p| < r :\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_k} \frac{1}{\zeta - p} d\zeta = \frac{k}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_1} \frac{1}{\zeta - p} d\zeta = k.$ (Cauchysche Integralformel)

(iii) χ ist stets ganzzahlig: Beweisskizze für C^1-Kurven.

Falls: $\alpha(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$, $r \in C^1([0,1], (0,\infty))$, $\varphi \in C^1([0,1])$
$r(0) = r(1)$, $e^{i\varphi(0)} = e^{i\varphi(1)} \Leftrightarrow \varphi(1) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\chi(\alpha;0) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{1}{r(t)e^{i\varphi(t)}}\left(r'(t)e^{i\varphi(t)} + r(t)\,e^{i\varphi(t)}i\varphi'(t)\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\right)dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\left[\log r(t)\right]_0^1}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} i(\varphi(1)-\varphi(0))}_{=\frac{1}{2\pi}(\varphi(1)-\varphi(0))\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

(Allgemeiner Beweis ca. Satz 9.16)

Beispiel 7.11 (i) Skizze

(ii) Skizzen

Definition 7.12 *Ist* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine geschlossene, stückweise* C^1*-Kurve, so ist* Bild $\alpha = \alpha([a,b])$.
Wir setzen $\mathrm{Int}\,(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild } \alpha : \ \chi(\alpha;z) \neq 0\}$ *das Innere von* α *und* $\mathrm{Ext}\,(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild } \alpha : \ \chi(\alpha;z) = 0\}$ *das Äußere von* α.

Definition 7.13 *Sei* $a \in D$ *eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$. *Dann ist das Residuum von* f *bei* a *gegeben durch:*

$$\mathrm{Res}\,(f;a) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(a)} f(\zeta)\,d\zeta \quad \textit{für kleines } r$$

Satz 7.14 *Das Residuum hängt nicht von der Wahl von* r *ab. Ist* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *die Laurententwicklung von* f, *so ist* $\mathrm{Res}\,(f;a) = a_{-1}$.

Beweis:

$$\int\limits_{\partial U_r(a)} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\partial U_r(a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n\,d\zeta = \int\limits_{\partial U_r(a)} \frac{a_{-1}}{\zeta - a}\,d\zeta = 2\pi i a_{-1}.$$

■

Theorem 7.15 *(Residuensatz). Sei* D *ein Elementargebiet,* $z_1,\ldots,z_k \in D$, k *verschiedene Punkte.* $D_1 := D\setminus\{z_1,\ldots,z_k\}$.
$f : D_1 \to \mathbb{C}$ *holomorph,* α *geschlossene Kurve mit* Bild $\alpha \subset D_1$.
Dann ist:

$$\int\limits_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\,(f;z_j)\,\chi(\alpha;z_j).$$

Beweis: Entwickle f nahe z_j in Laurentreihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)}(z-z_j)^n \quad \text{für } 0 < |z-z_j| < r_j$$

Betrachte Hauptteil h_j. $h_j(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(z-z_j)^n$ ist holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$.

$\tilde{f}(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{k} h_j(z)$ ist holomorph in D_1.

$\tilde{f}$ ist in der Nähe von z_j beschränkt $\Rightarrow z_j$ sind hebare Singularitäten.

$\Rightarrow \tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ holomorph. D Elementarbgebiet $\Rightarrow \int\limits_\alpha \tilde{f}(\zeta)\,d\zeta = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_\alpha f(\zeta)\,\zeta &= \sum_{j=1}^{n} \int_\alpha h_j(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \int_\alpha \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)}(\zeta-z_j)^n\,d\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} \underbrace{\int_\alpha (\zeta-z_j)^n\,d\zeta}_{=0 \text{ für } n\neq 1} = \sum_{j=1}^{k} a_{-1}^{(j)} \int_\alpha \frac{1}{\zeta-z_j}\,d\zeta \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f;z_j)\cdot\chi(\alpha;z_j).
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 7.16 (i) Es gilt auch:

$$\int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,k\} \\ \text{mit } z_j \in \operatorname{Int}(\alpha)}} \operatorname{Res}(f;z_j)\cdot\chi(\alpha;z_j)$$

(ii) Spezialfall: f holomorph in D, $h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, $\operatorname{Res}(h;z) = f(z)$.
Für $z \notin$ Bild α : $\int\limits_\alpha h(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i f(z)\cdot\chi(\alpha;z)$
$\chi(\alpha;z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$
Umlaufzahlversion des Cauchyschen Integralsatz.

Satz 7.17 *(Berechnung von Residuen)*
Sei $f : D\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, a nicht wesentliche Singularität von f, $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

(i) Hat f bei a einen Pol 1.Ordnung oder eine hebbare Singularität, so ist $\operatorname{Res}(f;a) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

(ii) *Hat f bei a einen Pol k-ter Ordnung, so ist*
$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big|_{z=a}((z-a)^k f(z))$.

(iii) *$f,g : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a)=0,\ g'(a)\neq 0 \Rightarrow \operatorname{Res}(\frac{f}{g};a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.*

(iv) *Falls f nicht die Nullfolge ist, so ist*

$$\operatorname{Res}(\frac{f'}{f};a) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } a \textit{ hebbar, } f(a)\neq 0. \\ k & \textit{falls } a \textit{ eine } k\textit{-fache Nullstelle ist.} \\ -m & \textit{falls } a \textit{ ein Pol } m\textit{-ter Ordnung ist.} \end{cases}$$

Beweis:

(i) Laurententwicklung: $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z)$, g holomorph $\Rightarrow (z-a)f(z) \to a_{-1}$ für $z \to a$.

(ii) Laurententwicklung: $f(z) = \sum\limits_{n=-k}^{-2} a_n(z-a)^n + \frac{a-1}{z-a} + g(z)$, g holomorph.
$\Rightarrow (z-a)^k f(z) = a_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum\limits_{\substack{m=0\\ m\neq k-1}}^{\infty} \tilde{a}_m (z-a)^m \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-a)^k f(z))$.

(iii) $\frac{f}{g}$ hat Pol 1.Ordnung. $\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} \cdot (z-a) = \lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)}{\frac{g(z)}{z-a}} = \lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(iv) falls a hebbar, $f(a)\neq 0 \Rightarrow \frac{f'}{f}$ holomorph nahe $a \Rightarrow \operatorname{Res}(\frac{f'}{f};a) = 0$.
Andernfalls: $f(z) = (z-a)^l g(z)$, a hebbare Singularität von g mit $g(a)\neq 0,\ l\in\mathbb{Z}$.
$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l(z-a)^{l-1}g(z)+(z-a)^l g'(z)}{(z-a)^l g(z)} = \frac{l}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow \operatorname{Res}(\frac{f'}{f};a) = l$.

■

Beispiel 7.18 (i) $h(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2+1} = \frac{\exp(iz)}{(z+i)(z-i)}$: $\operatorname{Res}(h;i) \overset{\text{Pol 1.Ord.}}{=} \lim\limits_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{\exp(iz)}{z^2+1} = \lim\limits_{z\to i}\frac{\exp(iz)}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}$.

(ii) $h(z) = \pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ Nennernullstellen: $\mathbb{Z}$, alle einfach
$\Rightarrow$ in allen $k\in\mathbb{Z}$ Pol 1.Ordnung; $\operatorname{Res}(h;k) = \frac{\pi\cos\pi k}{\pi\cos\pi k} = 1$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ Pole 3.Ordnung bei $\pm i$. Res $(f,i) =?$
Betrachte $\frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{dz^2}\right|_{z=i}((z-i)^3 f(z)) = \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2}{dz^2}\right|_{z=i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)}_{12\cdot\left.\frac{1}{(z+i)^5}\right|_{z=i}} = 6\cdot\frac{1}{(2i)^5} =$
$\frac{6}{32}\cdot(-i) = -\frac{3i}{16}$.

Definition 7.19 *(Meromorphe Funktionen)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt meromorph in D, falls es eine in D diskrete Teilmenge $P(f) \subset D$ gibt, mit:

(i) f ist auf $D \setminus P(f)$ holomorph.

(ii) Die Punkte in $P(f)$ sind Pole.

($P(f) = \emptyset$ ist erlaubt)

Definition 7.20 *Ist f meromorph auf D, so setzen wir für $a \in D$:*

$$\mathrm{ord}\,(f;a) := \max\{k \in \mathbb{Z} : \frac{f(z)}{(z-a)^k} \text{ hat eine hebbare Singularität in } a\}$$

Bemerkung 7.20a Ist $a \in N(f) = \{z \in D : \ f(z) = 0\}$, so ist $\mathrm{ord}\,(f;a) =$ die Vielfachheit von a als Nullstelle von f. Ist $a \in P(f) \Rightarrow -\mathrm{ord}\,(f;a)$ ist die Ordnung des Pols.
Also ist Res $(\frac{f'}{f};a) = \mathrm{ord}\,(f;a)$.

Satz 7.21 *(Null- und Polstellen zählendes Integral)*
Sei D Elementargebiet und f darauf meromorph. $N(f) = \{a_1,\dots,a_n\}$, $P(f) = \{b_1,\dots,b_m\}$.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve α mit Bild $\alpha \subset D \setminus (N(f) \cup P(f))$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{ord}\,(f;a_j)\cdot\chi(\alpha;a_j) + \sum_{k=1}^{m}\mathrm{ord}\,(f;b_k)\cdot\chi(\alpha;b_k).$$

Insbesondere ist, falls $\chi(\alpha;a_j) = \chi(\alpha;b_k) = 1,\ \forall j,k$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta &= \#(\text{Nullstellen (mit Vielfachheiten)}) \\ &\quad -\#(\text{Polstellen (mit Ordnung)}).\end{aligned}$$

Beweis: Letzte Bemerkung + Residuensatz. ∎

Theorem 7.22 *(Satz von Hurwitz)*
Seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf D. Falls die f_n keine Nullstelle in D haben, so hat f keine Nullstelle in D, außer f ist die Nullfunktion.

Beweis: Angenommen $f \not\equiv 0$, $f(a) = 0$. Sei $\epsilon > 0$ so, dass $f \neq 0$ in $\dot{U}_{2\epsilon}(a)$, $U_{2\epsilon}(a) \subset D$.
Behauptung: $\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$ lokal gleichmäßig auf $\dot{U}_{2\epsilon}(a)$. Es reicht zu zeigen: $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ lokal gleichmäßig.
Sei $p \in \dot{U}_{2\epsilon}(a) \Rightarrow |f(q)| \geq \frac{|f(p)|}{2} > 0$ für $|q-p| < \delta$
$\overset{\text{lokal glm. konv.}}{\Rightarrow} |f_n(q)| \geq \frac{|f(p)|}{4}$ für $|q-p| < \delta,\ n \geq N$.
$|\frac{1}{f_n(q)} - \frac{1}{f(q)}| = \frac{|f_n(q)-f(q)|}{|f_n(q)|\cdot|f(q)|} \leq C(p)|f_n(q) - f(q)| \to 0 \ \ \forall q$.
α eine Kurve mit $\chi(\alpha, a) = 1$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)}\,d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = 1 \ \lightning$$

■

Korollar 7.23 *Ist (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Folge injektiver holomorpher Funktionen, so ist die Grenzfunktion injektiv oder konstant.*

Beweis: Sei f die Grenzfunktion, $a \in D$. Die Funktion $f_n(z) - f_n(a)$ hat keine Nullstelle in $D \setminus \{a\}$.
$\Rightarrow f(z) - f(a)$ hat keine Nullstelle in $D \setminus \{a\}$ oder ist die Nullfunktion.
$\Rightarrow f(z) \neq f(a)$ für $z \neq a$ oder $f \equiv f(a)$.
$\Rightarrow f$ injektiv oder konstant. ■

Theorem 7.24 *(Satz von Rouché)*
Sei D ein Elementargebiet, α eine geschlossene Kurve in D, die jeden Punkt von $\operatorname{Int}(\alpha)$ genau einmal umläuft. Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph.
Falls f und $f+g$ endlich viele Nullstellen in D haben und für $\zeta \in \operatorname{Bild} \alpha$ gilt: $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, dann haben f und $f+g$ in $\operatorname{Int}(\alpha)$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheiten).

Beweis: Betrachte für $s \in [0,1]$ $\quad h_s(z) = f(z) + sg(z) \Rightarrow h_s(z) \neq 0$ für $z \in \operatorname{Bild} \alpha$. $N(s) = \#$Nullstellen von h_s in $\operatorname{Int}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{h_s'(\zeta)}{h_s(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{f'(\zeta)+sg'(\zeta)}{f(\zeta)+sg(\zeta)}\,d\zeta$ hängt stetig von s ab.
$N : [0,1] \to \mathbb{Z}$ ist stetig $\Rightarrow N$ ist konstant $\Rightarrow \#$Nullstellen von $f = N(0) = N(1) = \#$Nullstellen von $f+g$. ■

Bemerkung 7.25 Fundamentalsatz der Algebra:
$a_n \neq 0, \quad \underbrace{a_n z^n}_{f} + \underbrace{a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}_{g}$
Wähle für α einen großen Kreis $\alpha_R(t) = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.
R so groß, dass $|a_n|R^n \geq \underbrace{|g(z)|}_{\leq CR^{n-1}}$ für $|z| = R$

$\overset{\text{Rouché}}{\Rightarrow} f + g$ hat so viele Nullstellen wie $z \mapsto a_n z^n$, also n.

Erinnerung: Für eine geschlossene Kurve α gilt:

$$\int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f; z_j) \cdot \chi(\alpha; z_j)$$

Beispiel 7.26 $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = ?$
Mit $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad P, Q$ Polynome.
Idee: Schreibe das Integral über Kreislinie $\{|z| = 1\}$.
$\alpha(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi] \ \Rightarrow\ \alpha'(t) = ie^{it}$
$\int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot ie^{it}\,dt.$
Suche f so, dass $\int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt.$

$$\begin{aligned} \cos t &= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + \frac{1}{e^{it}}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{für } |z| = 1 \\ \sin t &= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - \frac{1}{e^{it}}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad \text{für } |z| = 1 \end{aligned}$$

Wir wollen $f(\alpha(t)) \cdot ie^{it} = R(\cos t, \sin t)$.
Wähle $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{iz} \frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}$
Annahme: $Q(x,y) \neq 0$ für $x^2 + y^2 = 1$.
$\Rightarrow f$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ und hat keine Pole auf α.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{\substack{a \in \mathbb{E} \\ a \text{ Sing. von } f}} \operatorname{Res}(f; a)$$

Satz 7.27 *Falls $P(x,y), Q(x,y)$ Polynome mit $Q(x,y) \neq 0$ für $x^2 + y^2 = 1$ sind, so gilt:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,dt = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{E}} \operatorname{Res}(f; a) \text{ für } f(z) = \frac{1}{iz} \frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}$$

Beispiel 7.28 Sei $a \in \mathbb{E}$. Dann ist $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt = \frac{2\pi}{1-a^2}$.
$P(x,y) = 1,\ Q(x,y) = 1 - 2ax + a^2 \neq 0$ für $|x| = 1$ $(a = \frac{i}{2},\ x = -\frac{3}{4}i)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz}\frac{1}{1-2a\cdot\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)+a^2} = \frac{1}{iz(1+a^2-az-\frac{a}{z})} \\ &\overset{a\neq 0}{=} \frac{i}{a}\cdot\frac{1}{z^2-az-\frac{z}{a}+1} = \frac{i}{a}\cdot\frac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} \end{aligned}$$

Singularitäten von f: $a \in \mathbb{E}$, $\frac{1}{a} \notin \mathbb{E}$. a ist Pol 1.Ordnung.

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{i}{a}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{a}} = \frac{i}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt = 2\pi i\cdot\frac{i}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2} \quad \text{(falls } a\neq 0)$$

Für $a = 0$ gilt: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos t+a^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1}\,dt = 2\pi$.

Satz 7.29 *Seien $P(x), Q(x)$ Polynome mit* Grad $Q \geq$ Grad $P + 2$.
Falls Q keine reellen Nullstellen hat und $a_1, \ldots, a_k$ die Pole von $\frac{P}{Q}$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ sind, so ist:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a_j\right).$$

Beweis: Da Grad $Q \geq$ Grad $p+2$, $Q \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ gilt, folgt, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ konvergiert.
Sei R so groß, dass $|a_j| < R$ für alle Pole.
Betrachte den Weg $\alpha_R = \beta_R \oplus \gamma_R$, $\beta_R =$ Verbindungsstrecke von $-R$ nach R (Bild $\beta_R \subset \mathbb{R}$), $\gamma_R =$ Halbkreis von Radius R in $\mathbb{H}$, positiv orientiert
$\Rightarrow \alpha_R$ geschlossener Weg.
$f := \frac{P}{Q}$

$$\overset{\text{Res-Satz}}{\Rightarrow} \underbrace{\int\limits_{\beta_R} f(\zeta)\,d\zeta}_{=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \underset{R\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + \underbrace{\int\limits_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta}_{|\bullet|\leq \pi R\cdot \underbrace{\sup\limits_{|z|=R}|f|}_{\leq \frac{C}{R^2}\text{ für große } R} \leq \frac{C\pi}{R} \underset{R\to\infty}{\to} 0} = 2\pi i\sum_j \operatorname{Res}(f;a_j)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f; a_j).$$

■

Beispiel 7.30 $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{3}$.

Da $x \mapsto \frac{1}{1+x^6}$ eine gerade Funktion ist, folgt, dass $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6}$.
$P(z) = 1,\ Q(x) = 1 + z^6$.
Nullstellen von Q : $e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{3i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{5i\pi}{6}} \in \mathbb{H}$ und $e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{9i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}} \notin \mathbb{H}$.
Die aus $\mathbb{H}$ sind jeweils Pole 1.Ordnung für f.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{Q}; a_j\right) &= \frac{1}{Q'(a_j)} = \frac{1}{6a_j^5} = -\frac{a_j}{6} \\
\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx &= 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{\frac{5i\pi}{6}}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{3}\cdot\left(i + 2i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Satz 7.31 *Seien $P(x), Q(x)$ Polynome mit $Q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und* $\operatorname{Grad} Q \geq \operatorname{Grad} P + 1$.
Falls $a_, \ldots, a_k$ die Nullstellen von Q in $\mathbb{H}$ sind, so ist für $\alpha > 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cdot e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f; a_j),\ \textit{wobei } f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}\exp(i\alpha z)$$

Beweis: Der Einfachheit halber zeigen wir nur $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i$ „Summe der Residuen“.
Sei $R > 1$ so, dass $|a_j| < R$ für alle Nullstellen von Q.
Betrachte für $r > R$ den Streckenzug $r \rightsquigarrow r + ir \rightsquigarrow -r + ir \rightsquigarrow -r \rightsquigarrow r$
Skizze
Residuensatz: $\int\limits_{\square} = 2\pi i$ Summe der Residuen

Wir müssen zeigen, dass $\uparrow (r \rightsquigarrow r + ir) \to 0$, $\leftarrow (r + ir \rightsquigarrow -r + ir) \to 0$ und $\downarrow (-r + ir \rightsquigarrow -r) \to 0$ für $r \to \infty$ gelten.

$$|\int\limits_{r+ir}^{-r+ir} f(\zeta)\,d\zeta| \leq 2r\cdot\frac{C}{r}\cdot e^{-\alpha r} \leq 2Ce^{-\alpha r} \to 0 \text{ für } r \to \infty$$

$$\int_r^{r+ir} f(\zeta)\,d\zeta = \underbrace{\int_r^{r+i\sqrt{r}} f(\zeta)\,d\zeta}_{\leq \sqrt{r}\cdot\frac{C}{r}\cdot 1 = \frac{C}{\sqrt{r}} \to 0} + \underbrace{\int_{r+i\sqrt{r}}^{r+ir} f(\zeta)\,d\zeta}_{\leq r\cdot\frac{C}{r}\cdot e^{-\alpha\sqrt{r}} \leq Ce^{\alpha\sqrt{r}} \to 0} \quad \to 0 \quad (r\to\infty)$$

Bei der Abschätzung des 1.Integrals wurde $|e^{i\alpha z}| \leq 1\ \forall z \in \mathbb{H}$ verwendet und bei der des 2.Integrals $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z}$. ∎

Beispiel 7.32 Sei $a \in \mathbb{R}$. Gesucht ist das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+a^2}\,dt$.

$\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t^2+a^2}\,dt.$
$P := 1,\ \alpha := 1,\ Q(z) := z^2+a^2$, Nullstellen von Q sind $\pm ia$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t^2+a^2}\,dt &= 2\pi i \operatorname{Res}(f; ia) = 2\pi i \left(\frac{\exp(i\cdot ia)}{ia+ia}\right) = \frac{\pi e^{-a}}{a} \\
f(z) &:= \frac{\exp(iz)}{z^2+a^2} \\
\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2+a^2}\,dt &= \frac{\pi e^{-a}}{2a}.
\end{aligned}$$

Bis jetzt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$, R hatte keine Pole auf der reellen Achse.
Was passiert bei Polen auf er reellen Achse?

Definition 7.33 *Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_k\} \to \mathbb{C}$ stetig, $a_1 < \ldots < a_k$. Falls für*

$$I(r,\delta) := \int_{-r}^{a_1-\delta} f(x)\,dx + \int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{k-1}+\delta}^{a_k-\delta} f(x)\,dx + \int_{a_k+\delta}^{r} f(x)\,dx$$

$I := \lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \delta\to 0}} I(r,\delta)$ existiert, so heißt dieser Wert der „(Cauchysche) Hauptwert von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$“.

Wir schreiben (P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = I$.

Bemerkung 7.34 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$ existiert nicht, denn sonst würden $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}$, $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx, \ldots$ existieren.

(P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} =?$

$$\int\limits_{-r}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta}^{r} \frac{dx}{x} = \log|x|\Big|_{-r}^{-\delta} + \log|x|\Big|_{\delta}^{r} = \log\delta - \log r + \log r - \log\delta = 0 \underset{\delta\to 0}{\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}} 0$$

Also ist (P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$.

Satz 7.35 *Seien P, Q Polynome mit* Grad $Q \geq$ Grad $P+1$, $\alpha > 0$, $f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$.
Falls Q auf der reellen Achse nur einfache Nullstellen hat, so gilt

$$\textit{(P.V.)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(a)=0 \\ a\in\mathbb{H}}} \operatorname{Res}(f;a) + \pi i \sum_{\substack{Q(a)=0 \\ a\in\mathbb{R}}} \operatorname{Res}(f;a).$$

Beweis: (Verallgemeinerung von Satz 7.31; Beweis ähnlich).
Sei R so groß, dass $|a_j| < R$ für alle Nullstellen von Q in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.
Betrachte den Weg $\gamma_{r,\delta}$, bestehend aus

- Strecken von r nach $r+ir$, von $r+ir$ nach $-r+ir$, von $-r+ir$ nach $-r$ und von $-r$ nach $a_1 - \delta$,
- Kreisbogen $\alpha_\delta^{a_j}$, $j = 1, \ldots, k$,
- Streckenzüge von $a_j + \delta$ nach $a_{j+1} - \delta$ und von $a_k + \delta$ nach r.

Wende Residuensatz an $\Rightarrow \int\limits_{\gamma_{r,\delta}} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum\limits_{\substack{Q(a)=0 \\ a\in\mathbb{H}}} \operatorname{Res}(f;a)$.

Es ist $I(r,\delta) = \underbrace{\int\limits_{\gamma_{r,\delta}} f(\zeta)\,d\zeta}_{=2\pi i \sum\limits_{\substack{a\in\mathbb{H} \\ Q(a)=0}} \operatorname{Res}(f;a)} - \int f(\zeta)\,d\zeta - \sum\limits_{\substack{a\in\mathbb{R} \\ Q(a)=0}} \int\limits_{\alpha_\delta^{a_j}} f(\zeta)\,d\zeta.$

Betrachte $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ \delta\to 0}} I(r,\delta)$.

1.Term: unabhängig von r und δ.

2.Term: $\int f(\zeta)\,d\zeta \to 0$ für $r \to \infty$ (unabhängig von δ) wie im Beweis von 7.31.

3.Term: Betrachte $\int\limits_{\alpha_\delta^{a_j}} f(\zeta)\, d\zeta$ und berechne Limes für $\delta \to 0$.

Laurententwicklung von f: a einfache Nullstelle von Q.
$\Rightarrow f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$ nahe a, h holomorph in $U_\epsilon(a)$, $c_{-1} = \mathrm{Res}\,(f;a)$.
Sei H eine Stammfunktion von h.
Dann ist $\int\limits_{\alpha_\delta^a} h(\zeta)\, d\zeta = H(a+\delta) - H(a-\delta)$

$\int\limits_{\alpha_\delta^a} \frac{c_{-1}}{\zeta - a}\, d\zeta = c_{-1} \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{1}{\delta e^{-it}} (-i)\delta e^{-it}\, dt = -i\pi c_{-1}$

$\Rightarrow \int\limits_{\alpha_\delta^a} f(\zeta)\, d\zeta = -i\pi c_{-1} + \underbrace{H(a+\delta) - H(a-\delta)}_{\to 0 \text{ für } \delta \to 0}$

Da H stetig bei $a \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{\alpha_\delta^a} f(\zeta)\, d\zeta = -i\pi\, \mathrm{Res}\,(f;a)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ \delta\to 0}} I(r,\delta) = 2\pi i \sum\limits_{\substack{a\in\mathbb{H} \\ Q(a)=0}} \mathrm{Res}\,(f;a) + \pi i \sum\limits_{\substack{a\in\mathbb{R} \\ Q(a)=0}} \mathrm{Res}\,(f;a).$ ■

Beispiel 7.36 Betrachte $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

$\sin x = \mathrm{Im}\,(e^{ix})$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ hat Pol 1.Ordnung bei 0 und keine weiteren Polstellen.

$\Rightarrow$ (P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i\, \mathrm{Res}\,(f;0) = \pi i$

$\Rightarrow$ (P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$, (P.V.) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = 0$.

Es ist sogar $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$.

Bemerkung 7.37 Betrachte Aufgabe 51 der Übungsblätter:
$\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \sum\limits_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{Res}\,(f;a)$, $\lambda > 0$, $\lambda \notin \mathbb{N}$, Grad $P + \lambda <$ Grad Q für $f(z) = (-z)^{\lambda-1}\frac{P(z)}{Q(z)}$

Kapitel 8

Der Riemannsche Abbildungssatz

Bemerkung 8.1 (Erinnerung) Seien $D, D' \subset \mathbb{C}$ offen. $\varphi : D \to D'$ heißt konform, falls φ bijektiv ist und $\varphi : D \to \mathbb{C}$ und $\varphi^{-1} : D' \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

Satz 8.2 *Ist $\varphi : D \to D'$ bijektiv und holomorph auf D, so ist φ^{-1} ebenfalls holomorph.*

Beweis: 1-Schritt: $\psi = \varphi^{-1}$ ist stetig. $\psi : D' \to D$. Wir zeigen: Ist $V \subset D$ offen, so ist $\psi^{-1}(V) \subset D'$ offen.
$\psi^{-1}(V) = \varphi(V)$ ist offen nach Satz über Gebietstreue $\Rightarrow \psi$ stetig.
Sei $M := \{w \in D' : \; w = \varphi(z), \, z \in D, \; \varphi'(z) = 0\}$.
Satz über Implizite Funktionen $\Rightarrow \psi$ holomorph in $D' \setminus M$. $N := \psi(M) = \{z \in D : \varphi'(z) = 0\}$.
φ nicht konstant $\overset{\text{Identitätssatz}}{\Rightarrow}$ N ist diskret $\Rightarrow M$ diskret $\Rightarrow \psi$ ist holomorph auf D' nach Riemannscher Hebbarkeitssatz. ∎

Definition 8.3 *Zwei Gebiete $D, D' \subset \mathbb{C}$ heißen konform äquivalent, wenn es eine konforme Abbildung $\varphi : D \to D'$ gibt.*

Bemerkung 8.4 Wir hatten gezeigt, dass jedes zu einem Elementargebiet konform äquivalente Gebiet ein Elementargebiet ist.
Frage: Sind je zwei Elementargebiete konform äquivalent?
Triviale Antwort: Nein, denn $\emptyset$ ist zu keinem Elementargebiet konform äquivalent und $\mathbb{C}$ ist zu $\mathbb{E}$ nicht konform äquivalent (Liouville: beschränkte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind konstant).
Keine weiteren Ausnahmen: Riemannscher Abbildungssatz: alle Elementarbgebiete $\neq \emptyset, \mathbb{C}$ sind konform äquivalent zu $\mathbb{E}$.

Allgemein: Was sind Äquivalenzklassen bezüglich konformer Äquivalenz von Gebieten?

Lemma 8.5 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, K kompakt, $K \subset D$, $M > 0$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(D, K, M) > 0$ mit der Eigenschaft: Für alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $\sup_D |f| \leq M$ gilt:*
Sind $z_1, z_2 \in K$, $|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.
„Beschränkte Familien holomorpher Funktionen sind lokal gleichmäßig gleichgradig stetig."

Beweis:

1.Schritt: $K \subset \overline{U_r(a)}$, $\overline{U_{2r}(a)} \subset D$. Seien $z_1, z_2 \in K$.
Cauchyformel: $f(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = 2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_j}\, d\zeta$.

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = 2r} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2} \right) d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|\zeta - a| = 2r} \frac{f(\zeta)(z_1 - z_2)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{4\pi r}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} |z_2 - z_1| \leq \frac{2M}{r} |z_2 - z_1| < \epsilon \end{aligned}$$

falls $|z_2 - z_1| < \frac{\epsilon r}{2M} =: \delta$.

2.Schritt: K beliebig. Wir zeigen: E gibt endlich viele $a_1, \ldots, a_N \in D$, $r_1, \ldots, r_N > 0$ mit $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} \overline{U_{r_j}(a_j)}$, wobei $\overline{U_{2r_j}(a_j)} \subset D$.
Denn: Für alle $a \in K$ existiert $r(a)$ mit $\overline{U_{2r(a)}(a)} \subset D$ (da D offen).
$\bigcup\limits_{a \in K} U_{\frac{r(a)}{2}}(a)$ ist offene Überdeckung von $K \overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow} K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_{\frac{r_j}{2}}(a_j)$, $\bigcup\limits_{j=1}^{N} \overline{U_{2r_j}(a_j)} \subset D$ für geeignete r_j, a_j.

3.Schritt: Wähle $\delta < \min\{\frac{r_j}{2}, \frac{\epsilon r_j}{2M}; j = 1, \ldots, N\}$.
Seien $z_1, z_2 \in K$, $|z_2 - z_1| < \delta \Rightarrow$ es gibt ein j mit $z_1, z_2 \in U_{r_j}(a_j)$.
$\overset{\text{1.Schritt}}{\Rightarrow} |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.

■

Lemma 8.6 *Sei (f_n) (wobei $f_n : D \to \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{C}$ offen) beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Wenn es eine dichte Teilmenge $S \subset D$ gibt, auf der (f_n) (punktweise) konvergiert, so konnvergiert (f_n) lokal gleichmäßig.*

Beweis: Sei $K \subset D$ kompakt. Zu zeigen: (f_n) konvergiert gleichmäßig auf K.
Wir zeigen das Cauchy-Kriterium: Für jedes $\epsilon > 0\, \exists N > 0$ so, dass $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ und für alle $z \in K$.
$M := \sup\limits_n \sup\limits_{z\in D} |f(z)| < \infty$.
Sei $\epsilon > 0$. Setze $\delta := \delta(D, M, K) > 0$ gemäß Lemma 8.5.
Dann ist $\bigcup\limits_{p\in S} U_\delta(p)$ eine Überdeckung von K, weil sonst S nicht dicht liegt.
Da K kompakt ist, gibt es $p_1, \ldots, p_l \in S$ mit $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} U_\delta(p_j)$.
$(f_n(p_j))_n$ konvergiert für jedes (feste) $j = 1, \ldots, l$,
$\Rightarrow \exists N > 0 :\ \max\limits_{j=1,\ldots,l} |f_m(p_j) - f_n(p_j)| < \epsilon$ für $m, n \geq N$.
Sei $z \in K$ beliebig. $\Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, l\}$ so, dass $|p_j - z| < \delta$.
Dann gilt für $n, m \geq N$:

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \underbrace{|f_m(z) - f_m(p_j)|}_{<\epsilon,\text{ denn } |z-p_j|<\delta} + \underbrace{|f_m(p_j) - f_n(p_j)|}_{<\epsilon,\text{ denn } n,m\geq N} + \underbrace{|f_n(p_j) - f_n(z)|}_{<\epsilon,\text{ denn } |z-p_j|<\delta} \leq 3\epsilon.$$

■

Theorem 8.7 *(Satz von Montel)*
Jede beschränkte Folge holomorpher Funktionen hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(f_n),\ f_n \in \mathcal{O}(D)$ mit $\sup\limits_n \sup\limits_{z\in D} |f_n(z)| < \infty$.
Die Menge $S := D \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) = \{x + iy :\ x + iy \in D,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist dicht und abzählbar. Sei $(s_n)_n$ Abzählung von S. Die Folge $(f_n(s_1))_n$ ist beschränkt (betragsweise, in $\mathbb{C}$).
$\underset{\text{Weierstraß}}{\overset{\text{Bolzano-}}{\Rightarrow}}$ es gibt eine konvergente Teilfolge.
Sei $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ eine Teilfolge (f_n) so, dass $(f_j^{(1)}(s_1))_j$ konvergiert.
Aus dieser Teilfolge wählen wir eine weitere Teilfolge $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \ldots$ so, dass $(f_j^{(2)}(s_2))_j$ konvergiert.
Induktiv erhalten wir eine Teilfolge $(f_j^{(n)})_j$ von (f_n) so, dass
$(f_j^{(n)}(s_1))_j, (f_j^{(n)}(s_2))_j, (f_j^{(n)}(s_3))_j, \ldots, (f_j^{(n)}(s_n))_j$ konvergieren.
Die Diagonalfolge $(f_n^{(n)})_n$ konvergiert dann punktweise für alle $s \in S$.
Lemma 8.6 $\Rightarrow (f_n^{(n)})_n$ konvergiert lokal gleichmäßig. ■

Theorem 8.8 *(Riemannscher Abbildungssatz)*
Jedes von $\emptyset$ und $\mathbb{C}$ verschiedene Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist zum Einheitskreis $\mathbb{E} = U_1(0)$ konform äquivalent.

Beweis:

1.Schritt: Es gibt ein zu D konform äquivalentes Gebiet D_1 mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{C} \setminus D_1$ eine volle Kreisscheibe enthält.
Sei $b \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann ist $f(z) = z - b$ eine holomorphe Funktion auf D ohne Nullstellen auf einem Elementargebiet.
$\overset{\text{Satz 4.51}}{\Rightarrow}$ es gibt holomorphe Quadratwurzel $g: D \to \mathbb{C},\ (g(z))^2 = z - b$.
<u>Behauptung:</u> g ist injektiv: $g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow (g(z_1))^2 = (g(z_2))^2 \Rightarrow z_1 - b = z_2 - b \Rightarrow z_1 = z_2$.
Außerdem gilt: $g(z_1) = -g(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
Also ist $D_1 = g(D)$ konform äquivalent zu D und hat die Eigenschaft $0 \neq w \in D_1 \Rightarrow -w \notin D_1$.
Da D_1 offen, $D_1 \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt Kreisscheibe $U_r(a) \subset D_1,\ 0 \notin U_r(a) \Rightarrow U_r(-a) \subset \mathbb{C} \setminus D_1$.

2.Schritt: D_1 (und damit D) ist konform äquivalent zu einem Gebiet D_2 mit $0 \in D_2 \subset \mathbb{E}$. <u>Beweis:</u> $h(z) = \frac{r}{2(z+a)}$ bildet das Äußere von $U_r(-a)$ konform ins Innere von $U_{\frac{1}{2}}(0) \setminus \{0\}$ ab.
Durch Verschieben um b mit $-b \in h(D_1)$ erhalten wir:

$$0 \in \underbrace{b + h(D_1)}_{=:D_2} \subset \mathbb{E}.$$

3.Schritt: Ein Extremalprinzip:
Sei $0 \in D_2 \subset \mathbb{E}$. Ist $\varphi: D_2 \to \mathbb{E}$ holomorph und injektiv mit $\varphi(0) = 0$ und maximalem $|\varphi'(0)|$ unter allen solchen Abbildungen, dann ist φ surjektiv, also D_2 und $\mathbb{E}$ konform äquivalent.
Zunächst zeigen wir das nächste Lemma:

Lemma 8.9 *Sei G ein Elementargebiet, $0 \in G \subset \mathbb{E}$. Falls $G \neq \mathbb{E}$, dann gibt es eine injektive holomorphe Funktion $\psi: G \to \mathbb{E}$ mit $\psi(0) = 0,\ |\psi'(0)| > 1$.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{E} \setminus G$. Betrachte die Abbildung $f(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. $\Rightarrow f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ konform, $f \neq 0$ auf G.
Also hat f eine holomorphe Quadratwurzel $g: G \to \mathbb{C},\ (g(z))^2 = f(z),\ g(G) \subset \mathbb{E},\ g$ injektiv.
Setze $\psi(z) = \frac{g(z) - g(0)}{\overline{g(0)}g(z) - 1}$.

Klar: $\psi(0) = 0$.
Wir berechnen $\psi'(0)$:

$$\begin{aligned}\psi'(z) &= \frac{g'(z)\left(\overline{g(0)}g(z)-1\right)-(g(z)-g(0))\,\overline{g(0)}g'(z)}{\left(\overline{g(0)}g(z)-1\right)^2}\\ \Rightarrow \psi'(0) &= \frac{g'(0)\left(|g(0)|^2-1\right)}{(|g(0)|^2-1)^2} = \frac{g'(0)}{|g(0)|^2-1}.\end{aligned}$$

Da $(g(z))^2 = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \Rightarrow 2g(0)g'(0) = \frac{-1+a\bar{a}}{1} = |a|^2-1$.
$|g(0)|^2 = |a| \Rightarrow |g(0)| = \sqrt{|a|}$.
Also ist $|\psi'(0)| = \frac{|a|^2-1}{2\sqrt{|a|}} \cdot \frac{1}{|a|-1} = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$
(da $0 < \left(1-\sqrt{|a|}\right)^2 = 1-2\sqrt{|a|}+|a| \Rightarrow 1+|a| > 2\sqrt{|a|}$). ∎

Beweis des Extremalprinzip:
Falls φ eine nicht surjektive Abbildung ist, die holomorph D_2 injektiv in $\mathbb{E}$ abbildet, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)|$ maximal. Betrachte $G = \varphi(D_2) \neq \mathbb{E}$. Benutze Lemma 8.9 und betrachte $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi : D_2 \to \mathbb{E} \Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist injektiv, $\tilde{\varphi}(0) = 0, |\tilde{\varphi}'(0)| = |\psi'(0)|\cdot|\varphi'(0)| > |\varphi'(0)|$. ↯ Widerspruch zur Maximalität von $|\varphi'(0)|$.

4.Schritt: In der Menge $M := \{\varphi : D_2 \to \mathbb{E},\ \varphi$ holomorph und injektiv, $\varphi(0) = 0\}$ gibt es eine mit maximalem $|\varphi'(0)|$:
Behauptung: Sei $s := \sup\{|\varphi'(0)| : \varphi \in M\}$. Wir zeigen: Es gibt $\varphi_0 \in M$ mit $|\varphi_0'(0)| = s$.
Beweis: $s < \infty$: Sei $r > 0$ und $\overline{U_r(0)} \subset D_2$. Dann ist für $\varphi \in M$:

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(0)} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-0)^2}\,d\zeta \Rightarrow |\varphi'(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

Sei (φ_n) eine Folge in M mit $|\varphi_n'(0)| \to s$.
$\overset{\text{Satz von Montel}}{\Rightarrow}$ (φ_n) hat konvergente Teilfolge, oBdA $\varphi_n \to \varphi_0$ lokal gleichmäßig.
$\varphi_0 : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorph, $\varphi_n'(0) \to \varphi_0'(0) \Rightarrow |\varphi_0'(0)| = s \neq 0 \Rightarrow \varphi_0$ ist nicht konstant.
Nach Satz von Hurwitz: φ_0 ist injektiv. $|\varphi_0(z)| \leq 1,\ \varphi_0(D_2)$ ist offen (Gebietstreue) $\Rightarrow \varphi_0(D_2) \subset \mathbb{E}$.
Also ist $\varphi_0 \in M \Rightarrow \varphi_0$ ist maximal, also nach Schritt 3 die gesuchte konforme Abbildung.

∎