$\boxed{15}$ (a) <u>Vor</u>: $f\in H(\mathbb{D})$, $\exists C>0$ mit $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z\in \mathbb{D}\setminus\{0\}$.

<u>Beh</u>: $g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, $g(z):=\frac{f(z)}{z}$ besitzt in 0 eine hebbare Singularität.

<u>Bew</u>: Nach Vor. gilt $|f(z)| \leq C\sqrt{z} \overset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$, und da f stetig ist folgt auch $f(0)=0$. Da f in 0 db ist, gilt $f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$. Also lässt sich die Funktion $g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, $g(z):=\frac{f(z)}{z}$ stetig nach 0 (mit Funktionswert $f'(0)$) fortsetzen. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist damit 0 eine hebbare Singularität von g. ▨

(b) <u>Vor</u>: $f,g\in H(\mathbb{C})$ mit $|f(z)|\leq|g(z)|$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

<u>Beh</u>: $\exists\lambda\in\mathbb{C}$ mit $f=\lambda g$.

<u>Bew</u>: Falls $g\equiv 0$ ist die Beh. klar. Sei also $g\not\equiv 0$, dann ist die Nullstellenmenge $Z(g)$ von g diskret in $\mathbb{C}$. Definiere $h:\mathbb{C}\setminus Z(g)\to\mathbb{C}$, $h(z):=\frac{f(z)}{g(z)}$, dann gilt nach Vor. $|h(z)|\leq 1$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus Z(g)$. Sei nun $z_0\in Z(g)$, dann finden wir $r>0$ mit $Z(g)\cap U_r(z_0)=\{z_0\}$. Also ist h auf $\dot{U}_r(z_0):=U_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ beschränkt und holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz lässt sich h in z_0 holomorph fortsetzen. Damit lässt sich h auf ganz $\mathbb{C}$ zu einer hol. Fkt. $\tilde{h}$ fortsetzen mit $|\tilde{h}(z)|\leq 1$ $\forall z\in\mathbb{C}$ (Stetigkeit). Nach dem Satz von Liouville ist $\tilde{h}$ konstant, also $\tilde{h}(z)=\lambda$ für ein $\lambda\in\mathbb{C}$ und alle $z\in\mathbb{C}$.
Für alle $z\in\mathbb{C}\setminus Z(g)$ gilt dann $\lambda=\tilde{h}(z)=h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, also $f(z)=\lambda g(z)$.
Für alle $z\in Z(g)$ folgt aus $|f(z)|\leq|g(z)|=0$ ebenfalls $f(z)=0=\lambda\cdot 0=\lambda g(z)$. ▨

$\boxed{15}$ (c) (i) $f(z) = \frac{z}{z^2-z-12}$ Beh: f hat in $z=4$ und $z=-3$ jeweils einen Pol 1. Ordnung.

Bew: Es gilt $z^2-z-12 = (z+3)(z-4)$, der Nenner von f hat also zwei Nullstellen $z_1=4$ und $z_2=-3$. In allen anderen Punkten ist f wohldef. und holomorph, d.h. für $\mathbb{C} \ni z \notin \{z_1, z_2\}$ hat sie keine Singularitäten. Setze $g(z) := \frac{z}{z+3}$, dann: $f(z) = \frac{g(z)}{z-4}$. Da g in einer Umgebung von $z_1=4$ holomorph ist und $g(4) \neq 0$ gilt, besitzt f in $z_1=4$ einen Pol der Ordnung 1. Analog ergibt sich, dass f in $z_2=-3$ einen Pol 1. Ordnung hat. ∎

(ii) $f(z) := \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ Beh: f hat in $\frac{1}{\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ jeweils einen Pol 1. Ordnung.

Bew: f ist wohldef. für $z \neq 0$, sofern $\sin(\frac{1}{z}) \neq 0$ gilt. Die Nullstellen von $g: z \mapsto \sin(\frac{1}{z})$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sind $z_k = \frac{1}{k\pi}$ für $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Zudem ist jedes dieser z_k eine einfache Nullstelle von g, denn die Ableitung $-\frac{1}{z^2}\cos(\frac{1}{z})$ verschwindet dort nicht. Also gibt es eine nahe z_k holomorphe Funktion g_k mit $\sin(\frac{1}{z}) = (z-z_k)g_k(z)$ und $g_k(z_k) \neq 0$. Wie in a) folgt nun, dass f in den isolierten Singularitäten z_k einen Pol 1. Ordnung besitzt. $z=0$ ist keine isolierte Singularität, denn wegen $z_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ findet man in jeder noch so kleinen Umgebung um 0 Pole von f. ∎

(iii) $f(z) := \frac{\sin(z)-z}{z^3}$ Beh: 0 ist eine hebbare Singularität von f.

Bew: f ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zudem zeigt die Darstellung

$$f(z) = \frac{\sin(z)-z}{z^3} = \frac{(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5 \mp \dots)-z}{z^3} = -\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}z^2 \mp \dots,$$

dass $z=0$ eine hebbare Singularität von f ist. ∎

(iv) $f(z) := \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}$ Beh: 0 ist eine wesentliche Singularität und 1 ist ein Pol der Ordnung 2 von f.

Bew: f ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0;1\}$. Da $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ in einer Umgebung um $z=1$ holomorph und nullstellenfrei ist, hat f in $z=1$ einen Pol der Ordnung 2.

In $z=0$ hat f eine wesentliche Singularität, denn wegen

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^n}{(\frac{1}{n}-1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-n}}{(-\frac{1}{n}-1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

liegt in 0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol vor. ∎

13 (a) (i) Def. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ und $f(-\frac{1}{n}) = (-\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}$.

(ii) Es gibt keine in einer Umgebung U um 0 holomorphe Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ mit

(+) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ für alle hinr. großen $n \in \mathbb{N}$, denn: Angenommen es gäbe solch ein U und f, sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass (+) für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt dann $f(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^3 = g(\frac{1}{n})$ mit $g: U \to \mathbb{C}$, $g(z) := z^3$. Da g holomorph und $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\}$ eine Teilmenge des Gebietes U mit Häufungspunkt $0 \in U$ ist, folgt mit dem Identitätssatz $f = g$, also $f(-\frac{1}{n}) = (-\frac{1}{n})^3 = -\frac{1}{n^3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, Widerspruch zu (+).

(iii) Es gibt keine in einer Umgebung U um 0 holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ mit

(++) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ für ungerade n und $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ für gerade n, für alle hinr. großen $n \in \mathbb{N}$, denn: Ang. es gäbe solch ein f, U und $n_0 \in \mathbb{N}$, so, dass (++) für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt. Für alle geraden $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt dann $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} = h(\frac{1}{n})$ mit $h: U \to \mathbb{C}$, $h(z) := z$. h ist holomorph auf dem Gebiet U, und die Menge $M := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, n \text{ gerade}\}$ hat den Häufungspunkt $0 \in U$. Mit dem Identitätssatz folgt $f = h$, im Widerspruch zu $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ für ungerade $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$.

(iv) Def. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{1+z}$. Dann ist f holomorph, und für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Beh.: $\nexists f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bew: Angenommen solch eine Funktion f existiert. Dann ist f nullstellenfrei auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g := \frac{1}{f}$ wohldefiniert mit $|g(z)| \leq \sqrt{|z|} \xrightarrow{z \to 0} 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität von g, kann also auf ganz $\mathbb{C}$ zu einer Fkt. $\tilde{g}$ fortgesetzt werden (diese Fortsetzung wird im Folgenden wieder g genannt). Diese Fortsetzung hat ausschließlich in 0 eine Nullstelle, womit g von der Form

$$g(z) = z^n h(z)$$ ist, für ein $n \in \mathbb{N}$ und $h \in H(\mathbb{C})$ mit $h(0) \neq 0$. h ist zudem nullstellenfrei (+).

Def. $u(z) := z^{2n-1} h^2(z)$. Dann $u \in H(\mathbb{C})$. Für $z \neq 0$ gilt dann

$$|u(z)| = \frac{1}{|z|} |g(z)|^2 \leq 1$$ (für $z = 0$ gilt dies trivialerweise).

Nach dem Satz v. Liouville ist u also konstant. Wegen $u(0) = 0$ also $u \equiv 0$, und damit auch h^2, also auch $h(z) = 0$ für $z \neq 0$. ↯ zu (+).

■