$\boxed{19}$ $G := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re} z > \frac{\pi}{4} - 1\}$, $f(z) := ze^z \quad (z \in G)$.

(a) <u>Beh</u>: f ist schlicht.

<u>Bew</u>: $f(z) = ze^z$, also $f'(z) = e^z + ze^z = (z+1)e^z \overset{z = x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})}{=} (x+iy+1)e^x(\cos y + i \sin y)$

$$= (x+1)e^x \cos y - ye^x \sin y + iye^x \cos y + i(x+1)e^x \sin y.$$

Somit: $\operatorname{Re} f'(z) = e^x(\overbrace{x\cos y + \cos y}^{(x+1)\cos y} - y \sin y)$.

Sei nun $z = x+iy \in G$, also $|y| < \frac{\pi}{4}$, $x > \frac{\pi}{4} - 1$.

$\ulcorner$ $\frac{d}{dy}(y \sin y) = \sin y + y\cos y \geq 0$, $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ und $(\cdot)\sin(\cdot)$ gerade $\lrcorner$

Also $e^x\left(\underbrace{(x+1)}_{>\frac{\pi}{4}}\underbrace{\cos y}_{>\frac{\sqrt{2}}{2}} - y \sin y\right) > e^x\left(\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. Somit gilt $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für

$z \in G$ und da G konvex ist, liefert das Schlichtheitskriterium der VL die Beh. $\blacksquare$

$\boxed{20}$ (a) $G := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$, $f(z) := e^{-e^z}$.

(iii) <u>Beh.</u>: $f_n : G \to \mathbb{C}$, $f_n(z) := f(z+n)$ $(n \in \mathbb{N})$ konv. lokal gleichmäßig gegen 0.

<u>Bew</u>: $|f_n(z)| = e^{-e^{x+n}\cos y}$ (siehe/vgl. (i))

Sei $K \subseteq G$ kompakt. Also ex. $\varepsilon > 0$, $c > 0$ mit $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2}-\varepsilon$ und $|\operatorname{Re} z| \leq c$ $\forall z \in K$.

Somit gilt für $z \in K$: $|f_n(z)| \leq \underbrace{\exp\left(-\exp(n-c)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{>0}\right)}_{\text{unabh. von } z} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ∎

(iv) <u>Beh.</u>: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. nicht gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von G gegen 0.

<u>Bew</u>: Wähle z.B. $M := \{z \in G : \operatorname{Re} z = 0\}$. M ist beschränkte Teilmenge von G.

Angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. auf M glm. gegen 0, so müsste für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ $\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = 0$ gelten. Für $z_n := \left(\frac{\pi}{2} - e^{-n}\right)i$, $(n \in \mathbb{N})$ gilt aber: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ und

$$|f_n(z_n)| = e^{-e^n \cos\left(\frac{\pi}{2}-e^{-n}\right)} \overset{\cos(\cdot)=\sin(\frac{\pi}{2}-\cdot)}{=} e^{-e^n \sin(e^{-n})} = e^{-\frac{\sin(e^{-n})}{e^{-n}}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} \neq 0, \text{ ↯}.$$ ∎

(b) Die Eigenschaften reflexiv und symmetrisch sind unmittelbar klar.

Genauso die der Transitivität $\left((\gamma_1,\ldots,\gamma_n),(\lambda_1,\ldots,\lambda_m),(\delta_1,\ldots,\delta_l)\right)$

$$\Rightarrow \Gamma^* \overset{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\sim(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}{=} \Lambda^* \overset{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\sim(\delta_1,\ldots,\delta_l)}{=} \bigcup_{k=1}^{l} \delta_k^* =: \Delta^*$$

Zudem für $f \in C(\Gamma^*)$: $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Lambda f(z)\,dz = \int_\Delta f(z)\,dz$. ∎