(b) (i) Beh.: $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz = 0$, wobei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t):=2e^{it}$.

Bew.: Die Fkt. $f(z):=\frac{\cos(z)}{z^2+1}$ besitzt Pole 1. Ordnung bei $z_0=\pm i$, sonst ist sie überall holomorph. $(\cos(\pm i)\neq 0)$ Die beiden Pole werden von γ jeweils einmal (im pos. Sinne) umlaufen, also liefert der Residuensatz

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\big(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\big).$$

Wegen $\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{0!}\left.\frac{\cos(z)}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{\cos(i)}{2i}$ und $\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{1}{0!}\left.\frac{\cos(z)}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{\cos(-i)}{-2i}$ (Teil (a)), also $\mathrm{Res}(f,i) = -\mathrm{Res}(f,-i)$, gilt $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz = 0$. ■

(ii) Beh.: $\int_\gamma \frac{z}{\cosh(z)-1}\,dz = 4\pi i$, wobei γ der pos. orientierte Rand von $\{x+iy\in\mathbb{C}: y^2<(4\pi^2-1)(1-x^2)\}$ ist.

Bew.: Sei $f(z):=\frac{z}{\cosh(z)-1}$. Die Nullstellen des Nenners von f sind also bei

$$\cosh(z)=1 \iff e^z+e^{-z}=2 \iff e^{2z}+1=2e^z \iff u^2-2u+1=0, \text{ wobei } u:=e^z.$$
$$\iff (u-1)^2=0 \iff 1=e^z \iff z=2k\pi i \text{ mit } k\in\mathbb{Z}.$$

Der Rand von G wird durch $y^2=(4\pi^2-1)(1-x^2)$, d.h. $x^2+\frac{y^2}{4\pi^2-1}=1$ beschrieben. Dies ist Ellipse um 0 mit den Halbachsen 1 und $\sqrt{4\pi^2-1}$. Wegen $\sqrt{4\pi^2-1}<\sqrt{4\pi^2}=2\pi$ wird nur die isol. Sing. in der 0 umlaufen, der Residuensatz liefert also $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)$.

Es gilt
$$f(z) = \frac{z}{\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)-1} = \frac{\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}z^2+\dots\right)^{-1}}{z},$$
d.h. f hat in 0 Pol 1. Ordnung.

Also $\mathrm{Res}(f,0) \overset{a)}{=} \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}z^2+\dots} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, also $\int_\gamma f(z)\,dz = 4\pi i$. ■

$\boxed{23}$ (a) Beh.: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8-4x+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Bew: $R(z) := \frac{1}{8-4z+z^2}$ erfüllt Vor. von 22 b), denn $8-4x+x^2 = (x-2)^2+4$.

Nst. des Nenners bei $(z-2)^2 = -4$, also $z_{1,2} = 2 \pm 2i$; Pole 1. Ordnung.

Nur $z_1 = 2+2i$ in oberer Halbebene

$$\mathrm{Res}(R, 2+2i) \overset{21a)}{=} \frac{1}{z-(2-2i)}\Bigg|_{z=2+2i} = \frac{1}{4i}, \text{ also } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8-4x+x^2} \overset{22b)}{=} 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

(b) Beh.: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}\,dx = 0$

Bew: $R(z) := \frac{z^2-1}{z^4+2z^2+1}$ erfüllt Vor. von 22 b), denn $z^4+2z^2+1 = (z^2+1)^2 > 0 \;\forall z \in \mathbb{R}$. Nenner hat doppelte Nst. bei $\pm i$, also $Q(z) := (z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$. Nur i in oberer Halbebene,

also $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}\,dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}(R, i)$, und

$$\mathrm{Res}(R, i) = \lim_{z \to i} \left[\left(\frac{z^2-1}{(z+i)^2}\right)'\right] = \lim_{z \to i} \frac{(z+i)^2 2z - 2(z+i)(z^2-1)}{(z+i)^4} = \frac{-4 \cdot 2i - 4i(-2)}{16} = 0 \Rightarrow \text{Beh.} \blacksquare$$

(c) Beh.: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt = \frac{2\pi}{1-a^2}$ für $a \in K(0,1)$.

Bew: Für $a=0$ gilt offensichtlich $\int_0^{2\pi} \ldots\, dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$. Sei also $0 \neq a \in K(0,1)$.

Dann ist der Integrand von der Form $R(\cos t, \sin t)$ mit $R(x,y) := \frac{1}{1-2ax+a^2}$

Wie in 22 a) def. wir

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2} = -\frac{1}{a} \frac{1}{z^2-az-\frac{1}{a}z+1}$$

$= -\frac{1}{a} \frac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$. Wegen $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} > 1$, ist a einzige Pol in $K(0,1)$ (1. Ordnung)

Zudem gilt $\mathrm{Res}(f, a) = -\frac{1}{a} \frac{1}{z-\frac{1}{a}}\Big|_{z=a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{a-\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-a^2}$. Somit (22a))

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt = 2\pi\, \mathrm{Res}(f, a) = \frac{2\pi}{1-a^2}. \blacksquare$$

(d) Beh: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,dt = \pi$.

Bew: Hier hat R die Form $R(x,y) = \frac{y^4}{1+x}$

Für $\bigwedge_{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ mit}} x^2+y^2=1$ gilt $R(x,y) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x} = (1-x)^2(1+x) \xrightarrow{x\to -1} 0$, also

erfüllt R die Vor. von 22 a). Def.

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{16z^4}\,\frac{(z^2-1)^4}{z+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}}$$

$= \frac{1}{8}\,\frac{(z+1)^2(z-1)^4}{z^4}$. f hat in $z=0$ Pol. 4. Ordnung, es gilt

$$f(z) = \left(c_1 z^2 + c_2 z + c_3 + \underbrace{\mathrm{Res}(f,0)}_{} \frac{1}{z} + c_4\frac{1}{z^2} + c_5\frac{1}{z^3} + c_6\frac{1}{z^4}\right) \text{ mit } c_i \in\mathbb{R} \text{ geeignet}, \; i\in\{1,\dots,6\}.$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{(-4+12-4)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$(z-1)^4 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$

also $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,dt = 2\pi\,\mathrm{Res}(f,0) = \pi$. ∎