$\boxed{3}$ $g: \mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\} \to \mathbb{C},\ g(z) = \dfrac{z+|z|}{\sqrt{2\operatorname{Re}(z)+2|z|}}$

<u>Beh</u>: g ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\}$ mit $g'(z) = \dfrac{|z|+\bar{z}}{2\sqrt{2}\,|z|\sqrt{\operatorname{Re} z+|z|}}$.

<u>Bew</u>: Setze $N(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$g(x+iy) = \frac{x+iy+N(x,y)}{\sqrt{2}\sqrt{x+N(x,y)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+N(x,y)} + i\frac{y}{\sqrt{x+N(x,y)}}\right) \text{ für alle } x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\},$$

also $g = u+iv$ mit $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+N(x,y)}$, $v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x+N(x,y)}}$.

Ana II $\Rightarrow$ N ist auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ db. mit $\frac{\partial N}{\partial \omega}(x,y) = \frac{\omega}{N(x,y)}$ für $\omega\in\{x,y\}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Also ist g <u>reell db.</u> und wir erhalten:

$$\partial_x u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1+\frac{x}{N(x,y)}}{\sqrt{x+N(x,y)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x+N(x,y)}}{N(x,y)},$$

$$\partial_y u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{y}{N(x,y)}}{\sqrt{x+N(x,y)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{y}{N(x,y)\sqrt{x+N(x,y)}},$$

$$\partial_x v(x,y) = -\frac{y}{2\sqrt{2}}\frac{1+\frac{x}{N(x,y)}}{(x+N(x,y))^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{y}{N(x,y)\sqrt{x+N(x,y)}},$$

$$\partial_y v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x+N(x,y)} - \frac{y}{2}\frac{\frac{y}{N(x,y)}}{\sqrt{x+N(x,y)}}}{x+N(x,y)} \quad \text{für alle } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(-\infty,0]\times\{0\}.$$

Damit gilt $\partial_y u = -\partial_x v$.

Zudem gilt mit $a := N(x,y)$: $\sqrt{2}\,\partial_y v(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+a} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{a\sqrt{x+a}}}{x+a} = \dfrac{\sqrt{x+a}}{2a}\cdot\dfrac{2a(x+a)-y^2}{(x+a)^2}$

$$= \frac{\sqrt{x+a}}{2a}\underbrace{\frac{2ax+2x^2+2y^2-y^2}{x^2+2ax+x^2+y^2}}_{=1} = \sqrt{2}\,\partial_x u(x,y).$$

Somit erfüllt $g = u+iv$ die CRD. Nach VL ist g dann holomorph und für alle $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ gilt:

$$g'(z) = \partial_x u(z) - i\partial_y u(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|z|}\left(\sqrt{\operatorname{Re} z+|z|} - i\frac{\operatorname{Im} z}{\sqrt{\operatorname{Re} z+|z|}}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Re} z+|z|-i\operatorname{Im} z}{2\sqrt{2}\,|z|\sqrt{\operatorname{Re} z+|z|}} = \frac{|z|+\bar{z}}{2\sqrt{2}\,|z|\sqrt{\operatorname{Re} z+|z|}}. \qquad \blacksquare$$