9 (a) <u>Beh</u>: Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.

<u>Bew</u>: Sei O eine beliebige Zusammenhangskomponente von D. Dann ist O offen, denn für $z_0 \in O \subseteq D$ ex. (da D offen) ein $r>0$ mit $U_r(z_0) \subseteq D$ und jedes $z \in U_r(z_0)$ kann mit z_0 durch einen stetigen Weg verbunden werden, also $U_r(z_0) \subseteq O$.

Nun ist $\left[\operatorname{Re} z_0 - \frac{r}{2}, \operatorname{Re} z_0 + \frac{r}{2}\right] + i\left[\operatorname{Im} z_0 - \frac{r}{2}, \operatorname{Im} z_0 + \frac{r}{2}\right] \subseteq U_r(z_0) \subseteq O$.

In jedem nichtleeren, reellen Intervall ex. ein rationales Element, somit ex. ein $z_1 \in O \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$.

Da $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^2$ abzählbar ist, und Zusammenhangskomponenten disjunkt sind, gibt es maximal abzählbar viele von ihnen. ∎

(c) $f: \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathbb{C};\ z \mapsto \log(z)$.

<u>Beh</u>: Der Konv.radius der Potenzreihenentw. von f um $z_0 \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ist $|z_0|$. Es gibt $z_0 \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ derart, dass dieser Konv.radius strikt größer ist als der Radius der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch in $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ liegt.

<u>Bew</u>: Es gilt $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{z^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ $(*)$, denn:

I.A: $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. ✓

I.S: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{\cdot^n}\right)'(z) = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}$$

und somit ist $(*)$ gezeigt. Die Potenzreihenentw. von f um z_0 lautet also

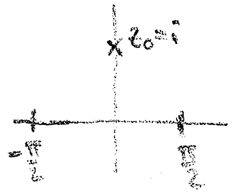
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z-z_0)^n.$$

Wegen $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|n z_0^n|}} = \dfrac{1}{|z_0|}$ gilt nach dem Satz v. Cauchy-Hadamard, dass die Potenzreihe den Konv.radius $|z_0|$ besitzt. Ist $\operatorname{Re} z_0 < 0$, so hat die größte Kreisscheibe um z_0, die noch in $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ liegt den Radius $|\operatorname{Im} z_0| < |z_0|$, womit auch die zweite Behauptung gezeigt ist. ∎

$\boxed{9}$ (b)

Beh: Der Konv.radius der PR-Entw. der Funktion $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ um $z_0 = i$ beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}$.

Bew: Nach Aufgabe 6 (a) besitzt der Nenner von f genau für $z \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ Nullstellen. Außerhalb dieser Punkte ist f also holomorph. Insbesondere ist f in $z_0 = i$ holomorph und kann somit nach einem Satz aus der VL in eine PR entwickelt werden. Der Konv.radius ist dabei mindestens so groß wie die größte Kreisscheibe um z_0, die noch im Holomorphiebereich von f liegt. Nach Pythagoras ergibt sich für diesen Radius



$$r = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass dies auch der Konv.radius der PR ist. Auf $U_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}}(i)$ gilt

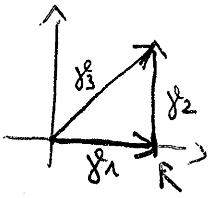
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n \quad \text{mit geeigneten } a_n \in \mathbb{C} \ (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wäre der Konv.radius größer als $\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}$, so wäre die PR insb. im Punkt $\frac{\pi}{2}$ stetig. Also würde ein $w \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$w = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n = \lim_{\substack{z \to \frac{\pi}{2} \\ |z-i| < \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n = \lim_{\substack{z \to \frac{\pi}{2} \\ |z-i| < \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}}} f(z).$$

Es gilt aber $|f(z)| \xrightarrow{z \to \frac{\pi}{2}} \infty$, im Widerspruch zu $\lim\limits_{\substack{z \to \frac{\pi}{2} \\ |z-i| < \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+4}}} |f(z)| = |w| < \infty$ ∎

10 $R>0$, $\gamma_1(t):=t$, $\gamma_2(t):=R+it$, $\gamma_3(t):=t(1+i)$ für $t\in[0,R]$



(a) Beh: $\int_{\gamma_3} e^{-z^2}dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}dz$.

Bew: $\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\gamma_3^-$ geschl. Kurve, durchläuft Rand von $\Delta := \Delta(0,R,R+iR)$.
Zudem $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^{-z^2}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Lemma v. Goursat liefert also

$$0=\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\gamma_3^-} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \underbrace{\int_{\gamma_3^-} f(z)dz}_{=-\int_{\gamma_3} f(z)dz}$$

Somit: $\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ ∎

(b) Beh: $\int_{\gamma_2} e^{-z^2}dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

Bew: Es gilt

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{-z^2}dz\right| = \left|\int_0^R e^{-\gamma_2^2(t)}\gamma_2'(t)dt\right| \le \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2}\, i\right| dt$$

$$= \int_0^R e^{t^2-R^2}dt \le \int_0^R e^{tR-R^2}dt = \left[\frac{e^{tR-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R}\xrightarrow{R\to\infty}0,$$

also auch $\int_{\gamma_2} e^{-z^2}dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$. ∎ Standard-Abschätzung nicht ausreichend!

(c) Beh: $\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \int_0^\infty \cos(x^2)dx$.

Bew: Es gilt

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2}dz = \int_0^R e^{-\gamma_1^2(t)}\gamma_1'(t)dt = \int_0^R e^{-t^2}dt \xrightarrow{R\to\infty}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Also auch $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} e^{-z^2}dz \overset{(a),(b)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (*) Aber auch

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2}dz = \int_0^R e^{-\gamma_3^2(t)}\gamma_3'(t)dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)dt \overset{g(t):=\frac{1}{\sqrt{2}}t}{=} \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(R)} e^{-2i g(t)^2}(1+i)g'(t)dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-it^2}(1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}R}\cos(t^2)-i\sin(t^2)dt \xrightarrow{R\to\infty}\frac{i+1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int_0^\infty \cos(t^2)-i\sin(t^2)dt}_{\text{ex. wegen }(*)},$$ also

$$\int_0^\infty\cos(t^2)-i\sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{i+1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$ Vergleich von Real- u. Imaginärteil liefert Beh.

$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ und $\int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. ∎