Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
20.04.2015

Funktionentheorie

1. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 04.05.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $z(t) \coloneqq 1 - e^{it}$.

Aufgabe 2

Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$), $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ konstant. Zeigen Sie, dass dann auch f konstant ist.

Aufgabe 3

Sei

$$g\colon \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\} \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2\operatorname{Re}(z) + 2\,|z|}}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass g holomorph ist, und bestimmen Sie g'.

Aufgabe 4

(a) Es seien $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann in z_0 komplex differenzierbar ist, falls die Funktion $f^\star\colon D^\star \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ mit $D^\star \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in D\}$ in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist.

(b) An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar? Geben Sie für diese Stellen jeweils die Ableitung an.

(i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z \operatorname{Im}(z)$,

(ii) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}$,

(iii) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x+iy) = x(x^2 - 3y^2) + iy(3x^2 - y^2)$.

Übungsblatt
Jeden zweiten Montag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung und kann unter

http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/ft2015s/

heruntergeladen oder in Raum 3.066 des Kollegiengebäude Mathematik (20.30) abgeholt werden. Die Aufgaben können zur Korrektur im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik (20.30) abgegeben werden. Die Rückgabe der abgegebenen Übungsblätter erfolgt ebenso in Raum 3.066 in den dort befindlichen Kasten. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich sichtbar auf die Blätter und heften diese zusammen.

Literatur

1) Burckel R.B.: An Introduction to Classical Complex Analysis. Birkhäuser (1979).

2) Fischer W., Lieb I.: A Course in Complex Analysis. Vieweg (2012).

3) Gamelin T.W.: Complex Analysis. Springer (2001).

4) Querenburg B.v.: Mengentheoretische Topologie. Springer (2008).

5) Remmert, R.: Theory of Complex Functions. Springer (1991).

6) Rudin W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill (1986).