

Funktionentheorie

2. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 18.05.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 5

Bestimmen Sie jeweils sämtliche $z \in \mathbb{C}$, für welche die gegebene Reihe konvergiert.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}.$$

Bestimmen Sie bei Teil (a) zusätzlich noch den Wert der Reihe für diese z .

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass die Erweiterung des Cosinus auf die komplexe Zahlenebene dieselben Nullstellen hat wie der Cosinus im Reellen, d.h. $\cos(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $z \in \{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (1+i^n)^{\frac{n}{2}} z^n, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n.$$

Aufgabe 7

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $w_k := e^{2k\pi i/n}$, $k = 0, \dots, n-1$ die n -ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_k} = \frac{n-1}{2}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $w_{n-k} = \frac{1}{w_k}$ für $k = 1, \dots, n-1$.

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i, \quad i^{1/i}, \quad (\log i)^i, \quad i^{(i^i)}.$$

Mit Ausdrücken der Form z^c ist dabei jeweils der Hauptwert der Potenzfunktion gemeint, und $z \mapsto \log z$ bezeichnet den Hauptwert des Logarithmus.

Aufgabe 8

- (a) Es sei p ein Polynom, $R > 0$ und $\gamma_R: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$. Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma_R} \overline{p(z)} dz = 2\pi i R^2 \overline{p'(0)}.$$

- (b) Es sei der Weg $\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it} \sin(t)$ gegeben. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\gamma} \cos(z) dz$ sowie die Weglänge von γ .
- (c) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt,$$

indem Sie eine geeignete komplexe Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.

Prüfung und Anmeldung

Die Prüfung findet in schriftlicher Form am Montag, 27.07.2015 von 11.00-12.00 im Daimler-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt. Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort im QISPOS freigeschaltet. Die Prüfungsnummer lautet 269. Der Anmeldeschluss ist am 20.07.2015.