Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
18.05.2015

Funktionentheorie

3. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 01.06.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 9

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ bei Entwicklung um $z_0 = i$.

(c) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $f(z) = \log(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um z_0 und folgern Sie, dass es Werte für z_0 gibt, sodass dieser Konvergenzradius strikt größer ist als der Radius der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ liegt.

Aufgabe 10

Es sei $R > 0$. Die Wege $\gamma_j \colon [0, R] \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$ seien definiert durch

$$\gamma_1(t) := t, \gamma_2(t) := R + it, \gamma_3(t) := t(1 + i), \text{ für alle } t \in [0, R].$$

(a) Beweisen Sie die Gleichung $\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz$.

(b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen $\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \to 0$ für $R \to \infty$.

(c) Berechnen Sie nun den Wert der sogenannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \text{ und } \int_0^\infty \cos(x^2) dx,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ benutzen.

Aufgabe 11

(a) Für $R > 1$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei γ der positiv orientierte Rand des Sektors

$$S := \{re^{i\varphi} : 0 < r < R, 0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}\}.$$

Berechnen Sie zunächst für diesen Weg den Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^n} dz$$

und beweisen Sie dann mittels des Grenzüberganges $R \to \infty$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

(b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ für $|z| < 1$ konvergent ist. Zeigen Sie für $0 < r < 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}} dz = \sum_{k=0}^n a_k,$$

wobei γ der positiv orientierte Rand des Kreises um 0 mit Radius r ist.

(c) Berechnen Sie mithilfe von (b) die Integrale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(1-z)z^3} dz \text{ und } \int_\gamma \frac{e^z}{(1-z)^2 z^3} dz,$$

wobei γ der positiv orientierte Rand des Kreises um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 12

(a) Seien $a, b > 0$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^{-z^2}$. Zeigen Sie, dass bei festem b die Wegintegrale von f über die vertikalen Seiten des Rechtecks mit den Ecken $\pm a, \pm a + ib$ für $a \to \infty$ gegen 0 konvergieren, und folgern Sie mit dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

(b) Berechnen Sie den Wert des Wegintegrals $\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3} dz$, wobei γ der positiv orientierte Rand des Kreises um 0 mit Radius 4 ist.