Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
01.06.2015

Funktionentheorie

4. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 15.06.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 13

(a) Geben Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften an, ob es eine Funktion f gibt, die in einer Umgebung des Nullpunktes holomorph ist und die jeweilige Eigenschaft (jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$) hat.

(i) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$,

(ii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$,

(iii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ für ungerade n, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ für gerade n,

(iv) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$.

(b) Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(\Omega), m \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in Z(f) := \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$. Zeigen Sie: f besitzt in z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung genau dann wenn $\frac{1}{f} \in H(\Omega \setminus Z(f))$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung besitzt.

Aufgabe 14

(a) Es sei $f \in H(\mathbb{C})$. Zu jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ von f um z_0 mindestens ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $a_n = 0$ ist. Zeigen Sie, dass f ein Polynom sein muss.

(b) Zeigen Sie: Ist $f \in H(\mathbb{C})$ nicht konstant, so gilt für jedes $c > 0$

$$\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}.$$

Wird statt Holomorphie nur Stetigkeit vorausgesetzt, so gilt in obiger Mengengleichheit im Allgemeinen nur "$\subseteq$".

Aufgabe 15

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = K(0,1)$.

(a) Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ und es gebe ein $C > 0$ mit $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{|z|}}$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}; g(z) := \frac{f(z)}{z}$ in 0 eine hebbare Singularität besitzt.

(b) Es seien $f, g \in H(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt mit $f = \lambda g$.

(c) Bestimmen Sie jeweils Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten der Funktion f:

(i) $f(z) := \frac{z}{z^2-z-12}$,

(ii) $f(z) := \frac{1}{\sin(1/z)}$,

(iii) $f(z) := \frac{\sin(z)-z}{z^3}$,

(iv) $f(z) := \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$.

Aufgabe 16

(a) Es sei $f \in H(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Zeigen Sie, dass es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to a$ für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ gibt mit

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(c) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville:
Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in H(\mathbb{C})$. Dann ist f genau dann ein Polynom vom Grad höchstens n, wenn Konstanten $a, b > 0$ existieren mit

$$|f(z)| \leq a + b\,|z|^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Prüfung

Die Prüfung findet in schriftlicher Form am Montag, 27.07.2015 von 11.00-12.00 im Daimler-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt. Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort im QISPOS freigeschaltet. Die Prüfungsnummer für Mathematiker lautet 269. Die Prüfungsnummer für Physiker lautet 205 mit der Bezeichnung Funktionentheorie 1.
Der Anmeldeschluss ist in beiden Fällen am 20.07.2015.