Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
15.06.2015

Funktionentheorie

5. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 29.06.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 17

Es sei $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$ und es gelte $\left|e^{f(z)}\right| \leq e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie $|f(z)| \leq |2r - f(z)|$ für alle $z \in \overline{K(0,r)}$ $\quad (r > 0)$ und betrachten Sie $h_r(z) := \frac{r^2 f(z)}{z^2(2r - f(z))}$ für $|z| < 2r$.

Aufgabe 18

(a) Seien $a \in K(0,1)$ und $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Zeigen Sie, dass $S_a \colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorph und bijektiv ist.

(b) Es sei $f \colon K(0,1) \to K(0,1)$ holomorph. Zeigen Sie:

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \text{ für alle } z \in K(0,1).$$

Hinweis: Betrachten Sie $g := S_{f(z_0)} \circ f \circ S_{-z_0}$ für festes $z_0 \in K(0,1)$ und S_a aus Teil (a), und verwenden Sie das Schwarzsche Lemma.

(c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f \colon K(0,1) \to K(0,1)$ mit $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ und $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6}$?

Aufgabe 19

Es sei $G := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}, \operatorname{Re} z > \frac{\pi}{4} - 1\}$ und $f \colon G \to f(G); f(z) = ze^z$.

(a) Zeigen Sie, dass f schlicht ist.

(b) Es sei $f^{-1} \colon f(G) \to G$ die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie in der Potenzreihenentwicklung von f^{-1} um 0 die ersten drei Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

Aufgabe 20

(a) Es sei $G := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$ und $f(z) := e^{-e^z}$.

(i) Zeigen Sie, dass $f\colon \overline{G} \to C$ beschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge $\{|w|, w \in f(\overline{G})\}$ kein Minimum besitzt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n\colon G \to \mathbb{C}, f_n(z) := f(z+n)$ lokal gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

(iv) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teil (iii) gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von G gegen 0?

(b) Im folgenden seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, f stetig auf Ω, $m, n \in \mathbb{N}$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ stüchweise stetig differenzierbare Wege in Ω. Wir schreiben $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \sim (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ genau dann, wenn

$$\Gamma^\star := \cup_{k=1}^n \gamma_k^\star = \cup_{k=1}^m \lambda_k^\star =: \Lambda^\star \text{ und}$$
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Lambda f(z)dz \text{ für alle } f \text{ stetig auf } \Gamma^\star.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tupel $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) ist.
Bemerkung: Der in der Vorlesung eingeführte Begriff der Kette ist also die jeweilige Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$.

Prüfung

Die Prüfung findet in schriftlicher Form am Montag, 27.07.2015 von 11.00-12.00 im Daimler-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt. Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort im QISPOS freigeschaltet. Die Prüfungsnummer für Mathematiker lautet 269. Die Prüfungsnummer für Physiker lautet 205 mit der Bezeichnung Funktionentheorie 1.
Der Anmeldeschluss ist in beiden Fällen am 20.07.2015.