Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

SS 2015
29.06.2015

Funktionentheorie

6. Übungsblatt

Abgabe bis Montag, 13.07.2015, 12.30 Uhr

Aufgabe 21

(a) Zeigen Sie: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in \Omega$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei $g \in H(\Omega)$ so gewählt ist, dass $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$ gelten.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+1} dz$, wobei $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) := 2e^{it}$,

(ii) $\int_\gamma \frac{z}{\cosh(z)-1} dz$, wobei γ der positiv orientierte Rand von $\{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2)\}$ ist.

Aufgabe 22
Zeigen Sie:

(a) Sind P und Q Polynome in zwei Variablen derart, dass $R := \frac{P}{Q}$ auf $\partial K(0, 1)$ keine Pole besitzt (dies ist z.B. erfüllt, wenn $Q(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$) und

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \text{ für } z \in K(0, 1),$$

so gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt = 2\pi \sum_{z \in M} \operatorname{Res}(f, z), \text{ wobei } M := \{z \in K(0, 1) : z \text{ ist Pol von } f\}.$$

(b) Sind P und Q Polynome einer reellen Veränderlichen derart, dass $R := \frac{P}{Q}$ auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat und zudem der Grad von Q um mindestens zwei größer ist als der Grad von P, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in M} \operatorname{Res}(R, z), \text{ wobei } M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, z \text{ ist Pol von } R\}.$$

Aufgabe 23
Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung von Aufgabe 22:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8-4x+x^2} dx$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1} dx$,

(c) $\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2} dt$ für $a \in K(0,1)$,

(d) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)} dt$.

Aufgabe 24

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f(z) := z^4 - 4z + 2$ in $K(0,1)$, sowie von $g(z) := z^4 + iz^3 + 1$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $\overline{K(0,1)}$ und $f \in H(U)$ mit $f(U) \subseteq K(0,1)$. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt hat.

Prüfung
Die Prüfung findet in schriftlicher Form am Montag, 27.07.2015 von 11.00-12.00 im Daimler-Hörsaal (Gebäude 10.21) statt. Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort im QISPOS freigeschaltet. Die Prüfungsnummer für Mathematiker lautet 269. Die Prüfungsnummer für Physiker lautet 205 mit der Bezeichnung Funktionentheorie 1.
Der Anmeldeschluss ist in beiden Fällen am 20.07.2015.