KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

22.02.2016

MODULPRÜFUNG
FUNKTIONENTHEORIE
WS 2015/2016

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang:	☐ Bachelor ☐ Lehramt ☐ Mathematik ☐ Physik ☐ ________

Wichtige Hinweise:

- Bitte füllen Sie den obigen Kasten auf diesem Deckblatt sowie die Kopfzeile auf allen folgenden Seiten aus. Falls Sie zusätzliche Blätter verwenden, schreiben Sie auf jedes lose Blatt ebenfalls Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Diese Klausur enthält 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben. Es können maximal 32 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 12 Punkte hinreichend.
- Zur Bearbeitung der Klausur stehen Ihnen 60 Minuten zur Verfügung. Außer Schreibsachen sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.
- Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert. Streichen Sie ungültige Lösungswege.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	Σ
/8	/8	/8	/8	/32

Note:

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (8 Punkte (2+3+3))

a) Wie lauten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen? Formulieren Sie den Zusammenhang zur Holomorphie einer Funktion $f: D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen ist.

b) Formulieren Sie das Lemma von Goursat und den Satz von Morera.

c) Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung einer Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$. Welche Arten von isolierten Singularitäten gibt es? Formulieren Sie den Zusammenhang zwischen der Art der isolierten Singularität $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Koeffizienten a_n.

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (8 Punkte (4+4))

Berechnen Sie den Wert der Integrale

a)

$$\int_\gamma \frac{z^2 e^z}{(z+1)^3} dz, \text{ wobei } \gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}; \gamma(t) = -1 + e^{it}$$

und

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (8 Punkte (4+4))

a) Seien $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ und $f \in H(S)$ derart, dass f auf $\overline{S}$ stetig und beschränkt ist und $\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|f(iy)\right| \leq 1$ sowie $\sup_{y\in\mathbb{R}} \left|f(1+iy)\right| \leq 1$ gelten.
Zeigen Sie: $\sup_{z\in S} |f(z)| \leq 1$.
Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Funktion $f_\varepsilon \colon S \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{1+\varepsilon z}$.

b) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von

$$f(z) = \frac{\sin^3(z-\pi)}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)(z-\pi)^2} e^{\frac{1}{z-2\pi}}$$

und klassifizieren Sie, mit Begründung, die isolierten Singularitäten.

Aufgabe 4 (8 Punkte (jeweils 1))

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechende Antwort auf der rechten Seite an. Es gibt keinen Punktabzug für falsche Antworten.

	Aussage	**richtig**	**falsch**
a)	Es gibt eine nicht-konstante ganze Funktion f mit $\lvert f(z)\rvert \in \mathbb{Q}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.		
b)	Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex. Eine Funktion $f \in H(\Omega)$ mit $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ für alle $z \in \Omega$ ist schlicht.		
c)	Es seien $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > 1\}$ und $f \in H(\Omega)$. Dann ist f eindeutig in eine Laurent-Reihe entwickelbar.		
d)	Es gibt eine beschränkte Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(\mathbb{C}) = K(0,1)$.		
e)	Es gibt eine Funktion $f \in H(K(0,1))$ und ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^{(n)}$ unstetig in $z = 0$ ist.		
f)	Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(\Omega)$ mit $0 \notin f(\Omega)$. Dann hat f eine holomorphe Wurzel.		

Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt. Es werden ausschließlich die Inhalte der Kästen bewertet.

g) Der Konvergenzradius R der Funktion $f(z) = \tan(z)$ um $z = i$ beträgt

$$R = \boxed{}$$

h) Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(5^n + i3^5)z^{4n}$ ist

$$R = \boxed{}$$