Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Andreas Hirsch

27.07.2015

Modulprüfung
Funktionentheorie
SS 2015

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang:	☐ Bachelor ☐ Lehramt ☐ Mathematik ☐ Physik ☐ ________

Wichtige Hinweise:

- Bitte füllen Sie den obigen Kasten auf diesem Deckblatt sowie die Kopfzeile auf allen folgenden Seiten aus. Falls Sie zusätzliche Blätter verwenden, schreiben Sie auf jedes lose Blatt ebenfalls Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Diese Klausur enthält 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben. Es können maximal 32 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 12 Punkte hinreichend.
- Zur Bearbeitung der Klausur stehen Ihnen 60 Minuten zur Verfügung. Außer Schreibsachen sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.
- Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert. Streichen Sie ungültige Lösungswege.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	$\sum$
/8	/8	/8	/8	/32

Note:

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 **(8 Punkte (2+3+3))**

a) Formulieren Sie die Cauchysche Integralformel für konvexe Mengen.

b) Wann heißt eine Folge holomorpher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent? Formulieren Sie zudem den Konvergenzsatz von Weierstraß.

c) Formulieren Sie das Lemma von Schwarz.

Aufgabe 2 (8 Punkte (4+4))

Berechnen Sie den Wert der Integrale

a)

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+\pi)^{89}}dz, \text{ wobei } \gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}; \gamma(t) = -\pi + e^{it}$$

und

b)

$$\int_\gamma \frac{z^2}{e^{iz}-1}dz, \text{ wobei } \gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}; \gamma(t) := \pi e^{it}.$$

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(8 Punkte (4+4))**

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{K(0,1)} \subseteq \Omega$. Beweisen Sie: Ist $f \in H(\Omega)$ und $|f|$ konstant auf $\partial K(0,1)$, f jedoch nicht konstant auf Ω, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $K(0,1)$.

b) Zeigen Sie: Für jedes reelle $\lambda > 1$ hat die Gleichung $ze^{\lambda - z} = 1$ in $K(0,1)$ genau eine Lösung.

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (8 Punkte (jeweils 1))

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechende Antwort auf der rechten Seite an. Es gibt keinen Punktabzug für falsche Antworten.

	Aussage	**richtig**	**falsch**
a)	Es gibt keine holomorphe Funktion $f\colon K(0,1) \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.		
b)	Sei Ω ein Gebiet und $f \in H(\Omega)$. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in Ω.		
c)	Es gilt $\lvert\sin(z)\rvert \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.		
d)	Ist $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to K(0,1)$ holomorph, so ist f konstant.		
e)	Ist Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in H(\Omega)$ und $0 \notin f(\Omega)$, so hat f einen holomorphen Logarithmus auf Ω.		
f)	Es gibt eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.		

Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt. Es werden ausschließlich die Inhalte der Kästen bewertet.

g) Sei f eine ganze Funktion mit $f(0) = \pi + i$ und $(\operatorname{Im} f)(x+iy) = \cosh(x)\cos(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\operatorname{Re} f)(x + \mathrm{i}y) = \boxed{}$$

h) Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n + in^5)z^n$ ist

$$R = \boxed{}$$