Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 1 - Lösungen

Abgabetermin: 25. Oktober 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (metrische Räume)

i) Sei $M := [1, \infty)$ und seien auf M die beiden Metriken

$$d_1(x, y) := |x - y|, \qquad d_2(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die offenen Mengen in (M, d_1) auch offen in (M, d_2) sind und umgekehrt.

ii) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen sie, dass mit

$$\widetilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein weiterer metrischer Raum $(M, \widetilde{d})$ definiert wird und Offenheit bezüglich d und $\widetilde{d}$ äquivalent ist.

iii) Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden Metrik:

$$d(x, y) := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}, \text{ falls es ein } \lambda > 0 \text{ gibt, mit } x = \lambda y \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}, \text{ sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik definiert und überlegen Sie sich, warum diese Metrik geeignet ist um (in $\mathbb{R}^2$) das Schienennetz um Paris zu modellieren.

Lösung

Zunächst sei bemerkt, dass Äquivalenz von Offenheitsbegriffen äquivalent dazu ist, zu zeigen, dass jede offene Kugel bezüglich der einen Metrik eine offene Kugel bezüglich der anderen Metrik enthält. Dies wird bezeigt, indem man die Metriken gegeneinander abschätzt Hat man gezeigt, dass zum Beispiel für alle $y \in U_\varepsilon^{d_1}(x)$ gilt

$$d_1(x, y) \leq C\, d_2(x, y),$$

so folgt, dass

$$U^{d_2}_{\frac{\varepsilon}{C}}(x) \subset U^{d_1}_\varepsilon(x).$$

Wir schätzen also die Metriken gegeneinander ab.

i) Für $x, y \in [1, \infty)$ gilt:

$$d_2(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - x}{xy}\right| \leq |x - y| = d_1(x, y)$$

Sei nun eine d_1 -Kugel gegeben, gesucht ist eine d_2 -Kugel, die darin enthalten ist. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $R > |x| + \varepsilon$. Dann folgt für alle y in der d_1 -Kugel $|y| \leq |x| + \varepsilon$ und somit

$$d_1(x, y) = |x - y| = \frac{|xy|}{|xy|}|x - y| \leq 2R\frac{|x - y|}{|xy|} = 2Rd_2(x, y).$$

ii) Bei der Prüfung der Metrikeigenschaften ist einzig die Dreiecksungleichung nicht trivial. Für $x, y, z \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \widetilde{d}(x,y) + \widetilde{d}(y,z)\end{aligned}$$

Für die Äquivalenz der Offenheit rechnet man nach:

$$\widetilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y)$$

Andererseits sei eine d-Kugel gegeben, so gilt für alle $y \in U_\varepsilon^d(x)$ mit o.B.d.A $\varepsilon < 1$ (sonst wähle einfach eine kleinere Kugel):

$$\widetilde{d}(x,y) \leq d(x,y) < \varepsilon$$

Daher folgt:

$$d(x,y) = \frac{\widetilde{d}(x,y)}{1-\widetilde{d}(x,y)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\widetilde{d}(x,y)$$

und damit

$$U_{\varepsilon-\varepsilon^2}^{\widetilde{d}}(x) \subseteq U_\varepsilon^d(x).$$

iii) $d(x,y) > 0$, da nur Beträge summiert werden. Ferner gilt:

$$d(x,x) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - x_k|^2\right)^{1/2} = 0$$

und aus $d(x,y) = 0$ folgt entweder

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} = 0,$$

woraus auch $x = y$ folgt, oder

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)^{1/2} = 0$$

woraus $x = y = 0$ folgt. Für die Dreiecksungleichung muss man verschiedene Fälle betrachten. Falls x, y, z auf einem Strahl liegen, so erhält man Gleichheit durch die Dreiecksungleichung der Norm in $\mathbb{R}^n$. Falls $x = \lambda y$, aber es kein $\lambda > 0$ gibt mit $x = \lambda z$, dann gilt:

$$\begin{aligned}d(x,z) &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)^{1/2} = d(x,y) + d(y,z)\end{aligned}$$

Sind alle drei jeweils paarweise linear unabhängig, so gilt

$$\begin{aligned}d(x,z) &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2\right)^{1/2} = d(x,y) + d(y,z).\end{aligned}$$

Um in der Umgebung von Paris Eisenbahn zu fahren, muss man immer über den Hauptbahnhof fahren, es sei denn, das Ziel liegt auf der Strecke, die zum Hauptbahnhof hinführt. So setzt sich der Schienenabstand zwischen Start- und Zielbahnhof immer aus Summe der Abstände zum Hauptbahnhof zusammen, oder besteht eben aus dem direkten Schienenabstand, falls beide Bahnhöfe auf einem Weg zum Hauptbahnhof liegen.

Aufgabe 2 (metrische Räume)

i) Zeigen Sie, dass offene Kugeln offen und abgeschlossene Kugeln abgeschlossen sind.

ii) Finden Sie einen metrischen Raum und eine offene Kugel, sodass der Abschluss dieser Kugel nicht mit der abgeschlossenen Kugel übereinstimmt.

Lösung

i) Zu zeigen ist: $B_\varepsilon(x) := \{y \in M, \text{ sodass } d(x,y) < \varepsilon\}$ ist offen, jeder Punkt enthält also eine ε-Kugel: Sei $y \in B_\varepsilon(x)$, wähle $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon - d(y,x)$. Dann ist $B_{\widetilde{\varepsilon}}(y) \subset B_\varepsilon(x)$, denn für alle $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}}(y)$ gilt:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Sei $D_\varepsilon(x) := \{y \in M, \text{ sodass } d(x,y) \leq \varepsilon\}$. Zu zeigen ist: $X/D_\varepsilon(x) = \{y \in M, \text{ sodass } d(x,y) > \varepsilon\}$ ist offen. Sei also $y \in X/D_\varepsilon(x)$. Wähle $\widetilde{\varepsilon} := d(y,x) - \varepsilon$. Dann ist $B_{\widetilde{\varepsilon}} \subset X/D_\varepsilon(x)$, denn für jedes $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}}$ gilt:

$$d(z,x) > d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \widetilde{\varepsilon} > \varepsilon.$$

ii) Betrachte die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ für } x = y \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases}$$

und betrachte die Kugel um $x \in \mathbb{R}$ mit Radius 1: $B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}, \text{ sodass } d(x,y) < 1\} = x$. Diese Menge ist zugleich abgeschlossen, da es zu jedem Punkt der Komplementärmenge eine offene Kugel mit Radius kleiner als 1 gibt, welche in der Komplementärmenge enthalten ist. Solche Kugeln bestehen nämlich nur aus dem Punkt selbst. Die entsprechende abgeschlossene Kugel $D_1(x) = \{y \in \mathbb{R}, \text{ sodass } d(x,y) \leq 1\}$ ist allerdings der ganze Raum.

Aufgabe 3 (Vollständigkeit)

i) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $C(M,\mathbb{R})$ der Raum der stetigen, Funktionen auf M mit Werten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls jedes $f \in C(M,\mathbb{R})$ beschränkt ist, so ist (M,d) vollständig.

ii) Gibt es eine Metrik, bezüglich der die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vollständig sind?

Lösung

i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die nicht konvergiert. Definiere die Funktion

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \liminf_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x).$$

f ist Lipschitz-stetig mit Konstanten 1, also insbesondere stetig, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\liminf_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,y) - \liminf_{m\longrightarrow\infty} d(x_m,x)| \\ &\leq \liminf_{m,n\longrightarrow\infty} |d(x_n,y) - d(x_m,x)| \end{aligned}$$

Man schätzt nun ab, dass für n, m groß genug

$$|d(x_n, y) - d(x_n, x)| \leq d(x, y) + d(x_n, x_m) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Mit $f(x) > 0$ ist $1/f$ auch stetig, aber nicht beschränkt, da es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n > N$ gilt

$$\frac{1}{f(x_m)} > \frac{1}{d(x_n, x_m)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Widerspruch zur Voraussetzung, dass jede stetige Funktion beschränkt ist.

ii) Betrachte $\mathbb{Q}$ mit der diskreten Metrik aus Aufgabe 2 ii). Die einzigen Cauchy-konvergenten Folgen sind dann jene, die ab einem gewissen Folgenglied konstant sind und welche daher trivialerweise konvergieren.

Aufgabe 4 (Banach'scher Fixpunktsatz)

i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = cos(x)$ genau eine eindeutige Lösung hat. Betrachte dazu die Abbildung

$$f : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow [\frac{1}{2}, 1], \; x \mapsto cos(x)$$

und verwende den Fixpunktsatz von Banach.

ii) Zeigen Sie mittels Banach'schem Fixpunktsatz, dass die Gleichung $x = \sqrt{x}$ auf $((0, \infty), d)$, mit $d(x, y) = |\log(x/y)|$ genau einen Fixpunkt hat.

Lösung

i) Zunächst ist der Fixpunkt nur auf $[-1, 1]$ zu suchen, da der $\cos$ nur Werte in diesem Interval annimmt. Ferner ist er größer als Null auf $[-1, 0]$ und größer als $1/2$ auf $[0, 1/2]$. Daher bleibt nur oben genanntes Interval zu betrachten. $[\frac{1}{2}, 1]$ ist als abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ein vollständiger metrischer Raum. Ferner ist f auch selbstabbildend, denn für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist $\cos(x) \leq 1$ und, da $\cos$ mononton fallen auf $[0, \pi]$ ist, gilt auch

$$\cos(x) > \cos(1/2) > \cos(\pi/6) = 1/2.$$

Desweiteren ist f eine Kontraktion mit einer möglichen Konstanten $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, denn nach Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [x, y]$, sodass

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\sin(\xi)| \cdot |x - y| \leq \sin(\pi/3)|x - y| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|x - y|$$

Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert das Gewünschte.

ii) Der Raum ist tatsächlich vollständig, denn für eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n > N$ gilt

$$d(x_n, x_m) = |\log(x_n/x_m)| = |\log(x_n) - \log(x_m)| < \varepsilon.$$

Daher ist $(\log(x_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Es gibt also ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(\log(x_n)) \longrightarrow y$. Dann ist $\exp(y)$ Grenzwert der Folge (x_n), denn

$$d(\exp(y), x_n) = |\log(\exp(y)) - \log(x_n)| = |y - \log(x_n)| \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Die Abbildung

$$g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty), \; g(x) = \sqrt{x}$$

ist selbstabbildend und eine Kontraktion, denn für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt:

$$d(g(x), g(y)) = |\log \sqrt{x} - \log \sqrt{y}| = \frac{1}{2}|\log(x) - \log(y)| = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Damit hat die Gleichung einen eindeutig bestimmten Fixpunkt (nämlich $x = 1$).