Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 1

Abgabetermin: 31. Oktober 2013, 18:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (metrische Räume)

i) Sei $M := [1, \infty)$ und seien auf M die beiden Metriken

$$d_1(x, y) := |x - y|, \qquad d_2(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die offenen Mengen in (M, d_1) auch offen in (M, d_2) sind und umgekehrt.

ii) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen sie, dass mit

$$\widetilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ein weiterer metrischer Raum $(M, \widetilde{d})$ definiert wird und Offenheit bezüglich d und $\widetilde{d}$ äquivalent ist.

iii) Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden Metrik:

$$d(x, y) := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}, \text{ falls es ein } \lambda > 0 \text{ gibt, mit } x = \lambda y \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}, \text{ sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik definiert und überlegen Sie sich, warum diese Metrik geeignet ist um (in $\mathbb{R}^2$) das Schienennetz um Paris zu modellieren.

Aufgabe 2 (metrische Räume)

i) Zeigen Sie, dass offene Kugeln offen und abgeschlossene Kugeln abgeschlossen sind.

ii) Finden Sie einen metrischen Raum und eine offene Kugel, sodass der Abschluss dieser Kugel nicht mit der abgeschlossenen Kugel übereinstimmt.

Aufgabe 3 (Vollständigkeit)

i) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $C(M, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen, Funktionen auf M mit Werten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls jedes $f \in C(M, \mathbb{R})$ beschränkt ist, so ist (M, d) vollständig.

ii) Gibt es eine Metrik, bezüglich der die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vollständig sind?

Hinweis: Bitte wenden.

Aufgabe 4 (Banach'scher Fixpunktsatz)

i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = \cos(x)$ genau eine Lösung hat. Betrachte dazu die Abbildung

$$f : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow [\frac{1}{2}, 1],\; x \mapsto \cos(x)$$

und verwende den Fixpunktsatz von Banach.

ii) Zeigen Sie mittels Banach'schem Fixpunktsatz, dass die Gleichung $x = \sqrt{x}$ auf $((0, \infty), d)$, mit $d(x, y) = |\log(x/y)|$ genau einen Fixpunkt hat.