**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

# Funktionalanalysis Übungsblatt 10 - Lösungen

Abgabetermin: 17. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

## Aufgabe 1 (Reflexive Räume)

a) Seien $E, F$ isomorphe Banachräume. Dann ist $E$ reflexiv genau dann, wenn $F$ reflexiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $C([0,1])$ nicht reflexiv ist.

*Lösung:*

a) Sei $U : E \to F$ bijektiv, linear, stetig und sei $E$ reflexiv, die Abbildung $J_E : E \to E''$ aus der Vorlesung also bijektiv. Betrachte die duale Abbildung $U' : F' \to E'$. Diese ist nach 14.7 bijektiv. Wiederholung des Arguments liefert Bijektivität von $U'' : E'' \to F''$. Sei $f'' \in F''$. Dann ist $U \circ J_E^{-1} \circ (U^{-1})'' f'' \in F$ und es gilt für alle $f' \in F'$:

$$f'(f) = f'(UJ_E^{-1}(U^{-1})''f'') = U'f'(J_E^{-1}(U^{-1})''f'') = (U^{-1})''f''(U'f') = f''(U'^{-1}U'f') = f''(f)$$

Damit folgt $J_F \circ (U \circ J_E^{-1} \circ (U^{-1})'') = U \circ J_E^{-1} \circ (U^{-1})'' \circ J_F = Id$. Die andere Richtung ist analog.

b) Betrachte die folgenden Elemente $\delta_y \in C([0,1])'$, gegeben durch $\delta_y(f) := f(y)$. Stetigkeit und Linearität sind leicht nachzuprüfen. Definiere dann die stetige, lineare Abbildung

$$\iota : \overline{[\delta_y,\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]]} \to \mathbb{R}$$

wie folgt. Zunächst sei auf den "Basiselementen" gegeben durch $\iota(\delta_y) = \chi_{[0,1/2]}(y)$. Anschließend setze $\iota$ auf der dichten Teilmenge der endlichen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, bezeichnet mit $[\delta_y,\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]]$ linear fort. Sei $f = \sum\limits_{n \le N} \lambda_n \delta_{q_n}$ mit $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und sei $f_{q_1,\cdots q_N}(x)$ eine beliebige stetige Funktion mit $f_{q_1,\cdots q_N}(q_j) = 1$ für $q_j \le 1/2$ und $0$ an den übrigen Stellen $q_j$ Man erhält dann:

$$\iota(f') = \sum_{n \le N, q_n \le 1/2} \lambda_n = \sum_{n \le N} \lambda_n \delta_{q_n}(f_{q_1,\cdots q_N}) = f'(f_{q_1,\cdots q_N}) \le \|f'\|.$$

Dann setzt sich $\iota$ zu einer stetigen linearen Abbildung auf $\overline{[\delta_y,\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]]}$ fort. Nach Hahn-Banach ist $\iota$ zu einem Funktional auf $C([0,1])'$ fortsetzbar (bezeichne das auch als $\iota$) und $\iota \in C([0,1])''$. Aber angenommen es gibt $f \in C([0,1])$ mit $\iota(f') = f'(f) \quad f' \in C([0,1])'$, dann folgt $f(y) = 1$ für $y \in [0,1/2]$ und $f(y) = 0$ für $y \in (1/2,1)$. Ich kann also Folgen mit Grenzwert $1/2$ finden, sodass die Bilder der Folgen unter $f$ verschieden sind. Daher ist $f$ nicht stetig.

**Aufgabe 2 (Schwache Konvergenz)**

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $l^2$ schwach konvergiert, aber nicht konvergiert.

b) Sei $E$ ein normierter Raum. Welcher Konvergenzbegriff auf $E'$ ist stärker, der der punktweisen Konvergenz oder der der schwachen Konvergenz? Gibt es Fälle, bei denen beide Begriffe äquivalent sind?

c) Zeigen Sie, dass auf $l^1$ Konvergenz und schwache Konvergenz übereinstimmen.

*Lösung:*

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Dann ist insbesondere $(a_n)$ eine Nullfolge, daher

$$\lim_{k\to\infty}\langle e^(k), a\rangle = \lim_{k\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_{k,n}a_n = \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Andererseits gilt für $k \neq j$, dass $\|e_k = e_j\| = \sqrt{2}$ sind, daher kann die Folge nicht konvergieren.

b) Sei $E$ normierter Raum und $J_E$ die Einbettung von $E$ in $E''$. Sei $(e'_k)$ schwach konvergente Folge in $E'$ Dann gilt $e''(e'_k)$ konvergiert $(e'' \in E'')$. Dann insbesondere auch $e''(e'_k)$ konvergiert $(e'' \in J_E(E))$. und daraus folgt dass $e'_k(e)$ für alle $e \in E$ konvergiert, wobei $e'' = J_E(e)$ gilt. Die punktweise Konvergenz ist also schwächer.
Für reflexive Räume stimmen beide Konvergenzbegriffe überein.

c) Es wird hier an einigen Stellen nur skizziert, da der Beweis doch umfangreich ist. Zunächst ist $l^1$ separabel und $(e^k)$ mit $e^k_n = \delta_{k,n}$ ist separierende Folge in $l^1$. Dann wird durch

$$\|f\|_\sigma := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} f(e^n)$$

eine Norm auf $(l^1)' = l^\infty$ definiert. Sei $(x^k)$ eine Folge in $l^1$, die schwach gegen $0$ konvergiert und $\varepsilon > 0$, dann gibt es $f_0 \in (l^1)'$ und $K \in \mathbb{N}$ sowie $r_0 > 0$, sodass gilt:

$$\|f - f^0\|_\sigma < r_0 \quad \Rightarrow \quad f(x^k) < \varepsilon \qquad (k \geq K).$$

Dies sieht man, indem man zeigt, dass

$$A_k := \{f \in l^\infty : \ \|f\|_\infty \leq 1, \ |f(x^n)| \leq \varepsilon \ (n \geq k)\}$$

abgeschlossen ist (Sei $g_l \in A_k$ mit $g_l \to_{\|\cdot\|_\infty} g$ dann folgt $g(x^n) \leq \|g - g_l\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|_{l^1} + \varepsilon \to \varepsilon$ $(l \to \infty)$ ) und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = l^\infty$. Dann folgt mit Satz von Baire, dass einer der $A_k$ eine offene Kugel enthält und man hats.

Wähle nun $N$ so groß, dass $\sum_{n\geq N+1}^\infty 2^{-n} < r_0/2$ gilt. Da aus schwacher Konvergenz punktweise Konvergenz folgt wähle $K$ so groß, dass $|x^k_n| < \varepsilon/N \quad (1 \leq n \leq N, \ k \geq K)$ gilt. Definiere nun $(f^k_n)$ in $l^\infty$ durch

$$f^k_n = \begin{cases} f^0 & n \geq N \\ sign(x^k_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: $\|f^k - f^0\|_\sigma < r_0$ und damit $|f^k(x^k)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^k x_n^k\right| < \varepsilon$. Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k| &= \sum_{n\leq N} |x_n^k| + \sum_{n\geq N+1} |x_n^k| \\ &< \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^k x_n^k + \sum_{n\leq N} -f^0 x_n^k \\ &< 2\varepsilon + \|-f^0\|_\infty \sum_{n\leq N} |x_n^k| \leq 3\varepsilon \qquad (k \geq K)\end{aligned}$$

Für $x^k \to_w x$ gilt $x^k - x \to_w 0$ dann folgt $x^k \to x$.

## Aufgabe 3 (Schwache Konvergenz in $l^p$)

a) Sei $1 < p < \infty$. Für eine Folgen $(x^{(n)})$ in $l^p$ sind dann äquivalent:

- $(x^{(n)}) \to_w x$
- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x^{(n)}\|_{l^p} < \infty$ und $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k$ $(k \in \mathbb{N}, n \to \infty)$ Hinweis: Banach-Steinhaus.

b) Gilt die Äquivalenz auch für $p = 1, \infty$?

*Lösung:*

a) ( “ $\Rightarrow''$ ) Sei $1 < p < \infty$ und sei $(x^{(n)})$ schwach konvergent in $l^p$ gegen $x$. Das heißt

$$x^{(n)}(y) \to x(y) \qquad (y \in (l^p)' = l^q),$$

für $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Fasse die Folge $(x^{(n)})$ als Folge in $(l^q)'$ auf, die punktweise konvergiert (hier ist wichtig $l^\infty$ auszuschließen, da es mehr Elemente im Dualraum gibt als solche, die als $l^1$-Folge darstellbar sind. Die Menge $\{(x^{(n)})\ n \in \mathbb{N}\}$ ist punktweise beschränkt. Nach Banach-Steinhaus also auch gleichmässig beschränkt. Es gibt also ein $C > 0$ mit

$$\|x^{(n)}\|_{l^p} = \|x^{(n)}\|_{(l^q)'} \leq C.$$

Daraus folgt der erste Teil. Ferner ist $e^{(k)} \in l^q$ und damit $x_k = e^{(k)}(x^{(n)}) \to e^{(k)}(x) = x_k$.
( “ $\Leftarrow''$ ) Sei $1 < p < \infty$ und $y \in (l^p)' = l^q$ fest, sowie $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $K$ so groß, dass $|y_k| < \varepsilon/(4C)$ für $k \geq K$ und $n$ so groß, dass $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon/(2K\|y\|)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}|(x^{(n)} - x)(y)| &= \sum_{k\leq K} |(x_k^{(n)} - x_k)y_k| + \sum_{k>K} |(x_k^{(n)} - x_k)y_k| \\ &\sum_{k\leq K} \frac{\varepsilon}{2K\|y\|}\|y_k\| + \sup_{k>K} |y_k| \sum_{k>K} |(x_k^{(n)} - x_k)| \\ &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4C} \cdot (\|x\| + \|x^{(n)}\|) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Das heißt $x^{(n)} \to_w x$.

b) Es geht in beiden Fällen schief:
$\underline{p = 1}$: Betrachte

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1/n & k \leq n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Dann ist $\|x^{(n)}\|_1 = 1$ und $x_k^{(n)} \to 0$ $(k \to \infty,\ n \in \mathbb{N})$ Aber für die konstante 1-Folge $(y_k) = (1) \in l^\infty$ folgt $x^{(n)}(y) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Das heißt, dass die Folge nicht schwach gegen 0

gehen kann.
<u>$p = \infty$ :</u> Betrachte die Folge

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & k \leq n \\ 1 & k > n \end{cases}$$

Die ist beschränkt durch $1$, konvergiert Eintragweise gegen $0$. Aber der Banachlimes von allen Folgengliedern ist aufgrund von Translationsinvarianz konstant $1$, kann also nicht gegen $0$ gehen.

## Aufgabe 4 (Schwache Abgeschlossenheit)

Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt schwach-abgeschlossen, falls jede schwach-konvergente Folge in $M$ ihren Grenzwert in $M$ hat. Zeigen Sie dass jede abgeschlossene, konvexe Menge $M$ schwach-abgeschlossen ist.

*Lösung:*

Sei $(x_n)$ schwach konvergente Folge mit Elementen in $M$ und Grenzwert $x \in E$. Angenommen $x \notin M$, dann gibt es nach geometrischer Version von Hahn-Banach ein Funktional $\phi \in E'$ mit $\phi(x_k) \leq \alpha < \phi(x)$. Dann gibts aber zu $\varepsilon < \frac{\phi(x)-\alpha}{2}$ kein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\phi(x_k) - \phi(x)| < \varepsilon$. Folglich konvergiert $x_k$ nicht schwach gegen $x$.