Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 10

Abgabetermin: 17. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Reflexive Räume)

a) Seien E, F isomorphe Banachräume. Dann ist E reflexiv genau dann, wenn F reflexiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $C([0,1])$ nicht reflexiv ist.

Aufgabe 2 (Schwache Konvergenz)

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in l^2 schwach konvergiert, aber nicht konvergiert.

b) Sei E ein normierter Raum. Welcher Konvergenzbegriff auf E' ist stärker, der der punktweisen Konvergenz oder der der schwachen Konvergenz? Gibt es Fälle, bei denen beide Begriffe äquivalent sind?

c) Zeigen Sie, dass auf l^1 Konvergenz und schwache Konvergenz übereinstimmen.

Aufgabe 3 (Schwache Konvergenz in l^p)

a) Sei $1 < p < \infty$. Für eine Folgen $(x^{(n)})$ in l^p sind dann äquivalent:

- $(x^{(n)}) \to_w x$
- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x^{(n)}\|_{l^p} < \infty$ und $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k \quad (k \in \mathbb{N}, n \to \infty)$ Hinweis: Banach-Steinhaus.

b) Gilt die Äquivalenz auch für $p = 1, \infty$?

Aufgabe 4 (Schwache Abgeschlossenheit)

Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt schwach-abgeschlossen, falls jede schwach-konvergente Folge in M ihren Grenzwert in M hat. Zeigen Sie dass jede abgeschlossene, konvexe Menge M schwach-abgeschlossen ist.